

## 壓電致動元件拓樸最佳化設計

黃仲偉<sup>1</sup>, 許紘維<sup>2</sup>, 呂良正<sup>2</sup>

<sup>1</sup>私立中原大學土木工程學系; <sup>2</sup>國立台灣大學土木工程學系

### 摘要

壓電致動元件具有廣泛的用途, 常見於蜂鳴器、探測器、馬達等零件。本研究旨在探討壓電致動元件拓樸最佳化設計, 亦即在給定振動模態之下, 以最大化複合元件之機電耦合因子為目標函數, 彈性材料的移除體積為限制條件。本文首先推導機電耦合因子的敏感度作為判斷元素效率的指標; 其次利用結構最佳化演進法的方式, 逐步移除不具效率的元素, 達到元件拓樸形狀最佳化設計。演進過程中配合模態追蹤以確保元件能維持在給定的振動模態, 並設定相關準則避免產生不穩定結構與模態飄移。數值實例顯示透過此法所產生的拓樸最佳化元件可以大幅的改善壓電致動元件之機電耦合因子。

**關鍵字:** 壓電致動元件、拓樸最佳化設計、結構最佳化演進法、敏感度、機電耦合因子

### ABSTRACT

Piezoelectric materials can transform electrical energy to mechanical energy and vice versa. Due to these characteristics, the materials have been used widely for sensors and actuators related applications. These applications usually require high electromechanical energy conversion to reduce energy losses. As a result, raising the electromechanical coupling coefficient ( $K_d$ ) becomes a major consideration in the design process. In this paper, the topology optimization of piezoelectric actuators for maximum  $K_d$  is studied using the evolutionary structural optimization (ESO) method. The sensitivity analysis of the electromechanical coupling coefficient is first derived to judge the efficiency of each element. In addition, a modal tracking method is carried to ensure that the considered mode is remained during the iterative process. Moreover, some relative checking criteria are proposed to avoid generating unstable structures and mode shifts. Numerical examples show that the proposed method can obtain optimal topology of piezoelectric actuators with maximum electromechanical coupling coefficients.

**Keywords:** piezoelectric actuators, topology optimization, evolutionary structural optimization, sensitivity analysis, electromechanical coupling coefficient

### 一、緒論

壓電材料為具有將機械能與電能互相轉換的特殊材料, 而壓電致動元件之原理是在彈性材料中內嵌壓電材料, 透過外加電壓作用於壓電材料上促使整體元件產生振動, 常用於超音波換能器、馬達、噴墨印頭等。市面上一般的壓電致動元件, 無論元件幾何構造為何, 內嵌之壓電材料構造通常為單純之方形體或圓盤體, 主要原因在於壓電材料乃作為驅動之用, 過於複雜之幾何構造將導致極化不易, 且增加振動行為控制上的困難。故欲提升壓電致動元件之使用效能, 設計上通常是透過調整彈性材料之拓樸形狀以達目標。

壓電元件設計目標因應用目的不同而異。舉凡感應位移、感應電流、機電耦合因子等均可能為其設計目標。然而一般對於頻率控制之應用型元件而言, 設計上通常是先決定元件之共振頻率或共振模態後, 再以機電耦合因子大小表現此共振行為之強弱; 換言之, 元件之共振頻率、共振時之模態是必須滿足的限制條件, 而元件機電耦合因子的大小視為對應的目標函數。所謂的機電耦合因子是元件於特定共振頻率或共振模態下機械能與電能轉換之強度。

機電耦合因子之大小與設計材料以及元件構造有關。一般當元件材料性質決定後, 元件之幾何尺寸或拓樸形狀便成為控制機電耦合因子大小的關鍵。過去為設計壓電

元件之幾何尺寸或拓樸形狀往往透過試誤法的方式，然而隨著壓電元件功能的複雜化，若繼續仰賴試誤法的方式設計，不免浪費大量人力時間與設備原料。由此觀之，若在設計之初先行模擬出元件在不同之幾何尺寸或拓樸形狀之各種行為，再從中挑選最好的設計，必能降低大量的設計成本。

結構拓樸最佳化可視為材料在初始設計領域內重新分配的問題。拓樸最佳化的功用不僅在於利用較少的材料達到較高的承載效率，節省不必要的材料浪費；同時可透過拓樸最佳化明瞭結構內力的傳遞與運動的機制，藉此改善結構的設計並增進結構的安全。文獻上已有不少學者提出各種方法來求解連體結構的拓樸最佳化問題然而文獻上關於拓樸最佳化的研究大都集中在探討單一材料組成之結構拓樸最佳化，對於雙重（或多重）材料組合而成的複合結構卻少有探討。

本研究利用結構最佳化演進法進行壓電元件的拓樸最佳化設計，首先推導機電耦合因子的敏感度，以元素敏感度做為元素效率的判斷準則，逐步移除不具效率的元素來達到體積限制條件。然而移除過程中會發生模態飄移的問題，本文另提出相關的準則來減少模態飄移所造成的誤判。

## 二、壓電理論與分析

本節將敘述壓電材料與彈性材料之組成律以及相關的控制方程式，並對壓電有限元素以及對應的模態分析做一說明，最後介紹機電耦合因子與如何由模態分析計算機電耦合因子。

### 2.1 材料組成律

壓電元件在三維空間的整體行為，在忽略材料的磁、熱效應與遲滯的情況下，可以透過求解下列的偏微分方程式計算出：

$$c_{ijkl}^E u_{k,li} + e_{kij} \varphi_{,ki} = \rho \ddot{u}_j \quad (1)$$

$$e_{kij} u_{i,jk} - \varepsilon_{ij}^S \varphi_{,ij} = 0 \quad (2)$$

其中  $c_{ijkl}^E$ ， $e_{kij}$ ， $\varepsilon_{ij}^S$  與  $\rho$  分別是壓電材料的彈性係數、壓電係數、介電係數與密度； $u_i$  為三維卡式座標的彈性位移， $\varphi$  為電壓（電位）。而應力、應變、電荷與電場則有下列的組成律關係：

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_k \quad (4)$$

上式中  $T_{ij}$ ， $S_{ij}$ ， $D_i$  與  $E_i$  分別是應力、應變、電荷與電場。另一方面，對於等向性彈性材料，其應力與應變之關係可以下列張量形式表達：

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} S_{kk} + 2\mu S_{ij} \quad (5)$$

其中  $\lambda$  與  $\mu$  為獨立之材料常數（Lamé constants）。

本文所採用的壓電材料為鋁鈦酸鉛陶瓷（亦即俗稱的 PZT），屬於 6mm 晶體。其對應之彈性係數、壓電係數、介電係數若寫成矩陣格式的話，可以下式表示：

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6c)$$

此外，由於壓電材料為一種絕緣體。所謂絕緣體，故除上述之材料組成律之外，尚需要滿足下列之準靜電方程式：

$$\nabla_i D_i = \nabla \cdot \{D\} = 0 \quad (7)$$

### 2.2 壓電有限元素

一般在分析機械條件與電氣條件耦合之問題時，通常將電場類比為應變，而將電位移類比為應力，因此可將方程式(1)與式(2)改寫為廣義應力與應變關係式：

$$\{\sigma_G\} = [C] \{\varepsilon_G\} \quad (8)$$

上式中  $\{\sigma_G\} = \{T D\}^T$  稱為廣義應力向量， $\{\varepsilon_G\} = \{S - E\}^T$  稱為廣義應變向量，而式中  $[C]$  稱為廣義剛度矩陣，其型式為：

$$[C] = \begin{bmatrix} c^E & e \\ e^T & -\varepsilon^E \end{bmatrix} \quad (9)$$

另一方面，應變向量  $\{S\}$  可透過微分運算位移向量  $\{f\}$  得到，且一般習慣以電位  $\phi$  描述電場強度  $E$ ，因此廣義之位移與應變關係可表示成：

$$\{\varepsilon_G\} = [B_G] \{f_G\} \quad (10)$$

其中  $\{f_G\} = \{f \ \phi\}^T = \{u \ v \ w \ \phi\}^T$  定義為廣義位移向量， $[B_G]$  為微分運算矩陣。

同樣可將廣義位移向量以廣義節點位移向量及形狀函數表示，亦即：

$$\{f_G\} = [N]\{\delta\} \quad (11)$$

上式中  $[N]$  為形狀函數矩陣， $\{\delta\}$  為廣義節點位移向量，因此對於任意節點  $i$  而言，在三維卡式座標系下節點自由度為：

$$\{\delta_i\} = \{f_i \ \phi_i\}^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ \phi_i\}^T \quad (12)$$

因此壓電元件之動態方程式可表示為：

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{f\phi} \\ K_{f\phi}^T & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中  $\{f\}$  為節點位移向量； $\{\phi\}$  為節點電位向量； $\{F\}$  為節點力； $\{Q\}$  為節點電荷； $[K_{ff}]$  為機械勁度矩陣； $[K_{f\phi}]$  為壓電效應勁度矩陣； $[K_{\phi\phi}]$  稱為介電勁度矩陣。 $[M_{ff}]$  為機械自由度上之質量矩陣。比較傳統固體力學有限元素法，不難發現在處理機械電氣耦合之問題時，係將電位  $\phi$  類比為位移  $f$ ；而將電荷  $Q$  類比為外力  $F$ 。

### 2.3 壓電元件模態分析

壓電有限元素法中，習慣將式(13)中節點電位向量  $\{\phi\}$  區分為三個子向量： $\{\phi\}^T = \langle \{\phi_s\}^T, \{\phi_r\}^T, \{\phi_b\}^T \rangle$ ，其中  $\{\phi_s\}$  表示未塗佈電極層之表面與元件內部之節點電位向量； $\{\phi_r\}$  代表壓電元件塗佈電極層之上表面節點電位向量； $\{\phi_b\}$  則表示塗佈電極層之下表面節點電位向量。而未塗佈電極層之節點電荷向量，必須滿足  $\{Q_i\} = \{0\}$ 。且由於電位乃相對量而非絕對量，一般先取參考電位面方能計算電位差，因此通常會直接取元件下表面作為接地面，亦即元件之下電極層節點電位向量為零，亦即  $\{\phi_b\} = \{0\}$ 。若考慮單純以施加電壓於電極層上激發元件振動，則元件節點外力向量滿足，因此可將方程式(13)化簡成：

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{f\phi} & K_{f\phi_r} \\ K_{f\phi}^T & K_{\phi\phi} & K_{\phi\phi_r} \\ K_{f\phi_r}^T & K_{\phi_r\phi}^T & K_{\phi_r\phi_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \phi \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_r \end{Bmatrix} \quad (14)$$

對於壓電元件而言，其自由振動問題因電氣邊界不同區分為共振 (resonance) 型態與反共振 (anti-resonance) 型態。所謂共振型態，乃電極層具有等電位之情況。故若以下電極層作為接地面，則上電極層之電位向量必須滿足  $\{\phi_r\} = \{0\}$ ，故上式可再進一步簡

化為共振型態自由振動方程式：

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{f\phi} \\ K_{f\phi}^T & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

另一方面，所謂反共振型態之自由振動，乃上電極層不存在電荷之情況，即  $\{Q_r\} = \{0\}$ 。因此方程式(14)可改寫成：

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{f\phi} & K_{f\phi_r} \\ K_{f\phi}^T & K_{\phi\phi} & K_{\phi\phi_r} \\ K_{f\phi_r}^T & K_{\phi_r\phi}^T & K_{\phi_r\phi_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \phi \\ \phi_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_r \end{Bmatrix} \quad (16)$$

假設結構振動為簡諧運動，可將廣義節點位移向量表示為：

$$\{\delta(t)\} = \{\psi\} e^{i\omega t} \quad (17)$$

其中  $\{\psi\}$  為與時間無關之節點簡諧振幅向量， $\omega$  為自然振動頻率。將(17)式分別代入(15)與(16)兩式，可得到求解壓電元件自由振動之廣義特徵方程式：

$$[K]\{\psi\} = \omega^2 [M]\{\psi\} \quad (18)$$

上式中  $[K]$  與  $[M]$  為對應共振和反共振時之總體勁度矩陣和質量矩陣。透過(18)式可以解得一系列特徵值與特徵向量。若是求解共振型態之自由振動，則利用廣義特徵方程式所得之特徵值平方根為壓電元件之共振頻 (resonance-frequency,  $\omega_R$ )，而伴隨求得之特徵向量，稱為元件在共振下之廣義模態向量；反之，若求解反共振型態之自由振動，則稱此特徵值之平方根為壓電元件之反共振頻 (anti-resonance-frequency,  $\omega_A$ )，而伴隨求得之特徵向量，稱為元件在反共振下之廣義模態向量。

### 2.4 機電耦合因子

所謂壓電元件之機電耦合因子 (electromechanical coupling coefficient, 簡稱為 EMCC 或  $K_d$ )，其定義為在輸入能量全為介電能 (機械能) 的情況下，機電耦合因子的平方等於儲存在壓電材料內由輸入的介電能 (機械能) 轉換成的機械能 (介電能) 與輸入能量的比值。其值越大所產生的壓電效果就愈大。而此值之大小與所使用之材料種類固然有關，但實際應用時，機電耦合因子必須在將材料形成某一特性元件結構體後探討才會有意義。

不過一般來說，上述的定義方式除了敘述不夠明確外，也很難以簡單的數學式表示出此因子的計算公式。因此在實際計算此種機電耦合因子時，針對壓電材料所處的驅動

狀態如靜態或動態等考慮因素下，又提出數個不同的定義，以計算不同情況時的機電耦合因子。一般計算元件振動模態之機電耦合因子大小，主要是針對共振狀態下之振動模態。利用等效電路的觀念，將壓電元件視為 LRC 電路，此時機電耦合因子可以利用下式近似計算 [1]：

$$K_d^2 \cong \frac{\omega_A^2 - \omega_R^2}{\omega_A^2} \quad (19)$$

上式中  $\omega_R$  為元件之共振頻率； $\omega_A$  為元件之反共振頻率。利用前節所述之模態分析計算共振與反共振頻率，再配合 (19) 式即可決定其動態機電耦合因子。

值得一提的是：理論上若元件有  $n$  個自由度，則有  $n$  個振動模態；而每一振動模態皆可透過計算機電耦合因子評估該模態之振動能力，故實務上必須先指定元件之特定振動模態再計算對應之機電耦合因子。而欲提高設計模態之機電耦合因子之難度，即在於在最佳化過程中必須確定每次擷取之模態皆與初始指定的設計模態相當，才能保證機電耦合因子最佳化的合理性。此乃由於壓電元件之模態將隨拓樸形狀產生變異，若初始設計共振模態為元件之第  $i$  模態，則此設計模態可能會隨拓樸之改變而平移 (shifting) 到第  $j$  模態。此一問題將在後一節討論。

### 三、結構最佳化演進法

本節將簡介求解拓樸最佳化問題中常用的結構最佳化演進法 [2-3]，並推導用以判斷元素效率的機電耦合因子敏感度，以及在最佳化演進過程中的模態追蹤與其他用以控制元素移除與否的相關條件。

#### 3.1 結構最佳化演進法

結構最佳化演進法的原理在於結構物在承受外力時，並非所有元素皆均勻地承受外力，其中只有部分元素在受力過程中承擔大部分的外力，而其他的元素都處於無效率的狀態。因此，藉由逐步地移除這些不重要的元素，所留下來的元素集合便能夠漸漸地演進至拓樸最佳化的形狀，此種過程就是最佳化演進的基本概念。

然而要移除無效率的元素會牽扯出兩個問題：如何判斷元素的效率，以及如何移除無效率的元素。對於元素效率的判斷必須視目標函數而定，也就是利用目標函數推導

各個元素的敏感度，元素敏感度的大小即代表元素效率的高低，而對應於目標函數為最大化機電耦合因子的敏感度將於下節加以推導。

另一方面，元素的移除方式必須採用逐步移除的方式。主要在於若單次移除過多元素，不但會違反敏感度推導的假設，且會錯失拓樸最佳化的形狀。本文所採用的方式是對各元素的敏感度加以排序，每次的演進過程中固定移除若干敏感度較高的元素，以提高壓電元件的機電耦合因子。每次移除元素的數量可取 1% 的元素總數，直至移除元素的總量達到預設值為止。

#### 3.2 機電耦合因子敏感度

底下為壓電元件之機電耦合因子敏感度的推導。在討論第  $n$  個模態下之機電耦合因子，可將式 (19) 寫為：

$$(K_d^2)_n \cong \frac{(\omega_A^2)_n - (\omega_R^2)_n}{(\omega_A^2)_n} \quad (20)$$

式中下標  $n$  表示第  $n$  個振動模態。對上式作全微分以探討當元素移除時對機電耦合因子  $K_d^2$  之影響：

$$\Delta(K_d^2)_n = \frac{2(\omega_R)_n [(\omega_R)_n \Delta(\omega_A)_n - (\omega_A)_n \Delta(\omega_R)_n]}{(\omega_A^3)_n} \quad (21)$$

觀察上式可知，移除某元素對機電耦合因子之影響除了與元件之共振頻率  $\omega_R$  以及反共振頻率  $\omega_A$  有關之外，亦與移除某元素對元件共振頻及反共振頻之改變量  $\Delta(\omega_R)_n$ 、 $\Delta(\omega_A)_n$  有關，而後兩者之推導如下段所述。

若將 (18) 式改以雷利商數 (Rayleigh quotient) 的形式表示：

$$(\omega^2)_n = \frac{\{\psi\}_n^T [K] \{\psi\}_n}{\{\psi\}_n^T [M] \{\psi\}_n} = \frac{K_n}{M_n} \quad (22)$$

其中  $K_n$  代表第  $n$  個共振或反共振模態之廣義勁度； $M_n$  代表第  $n$  個共振或反共振模態之廣義質量。假設移除元素之後對特徵向量之變化量極小，則對式 (22) 作全微分可探討元素之移除對  $(\omega^2)_n$  之影響：

$$\Delta(\omega^2)_n = \frac{1}{M_n^2} [\Delta K_n - (\omega^2)_n \Delta M_n] \quad (23)$$

上式中關於第  $n$  個模態下，廣義勁度變化量  $\Delta K_n$  與廣義質量  $\Delta M_n$  可透過下式計算：

$$\Delta K_n \approx -\{\psi^i\}_n^T [k^i]_n \{\psi^i\}_n \quad (24a)$$

$$\Delta M_n \approx -\{\psi^i\}_n^T [m^i]_n \{\psi^i\}_n \quad (24b)$$

其中 $\{\psi^i\}_n$ 為第 $n$ 個共振或反共振模態對應第 $i$ 個元素之特徵向量，而 $[k^i]$ 與 $[m^i]$ 分別代表第 $i$ 個元素之勁度矩陣與質量矩陣。在此值得一提的是：在拓樸最佳化過程中，本文只針對等向性材料的元素進行移除的動作，壓電材料則是維持不變。原因在於壓電材料必須極化，故實務上不太需要考慮拓樸形狀的變化。因此(24)式中的元素勁度矩陣與質量矩陣只需考慮位移的自由度。

將(24)式計算所得之結果代入(23)式，再透過下式即可得到移除第 $i$ 個元素對共振頻或反共振頻之影響：

$$\Delta(\omega)_n^i = \left[ (\omega^2)_n + \Delta(\omega^2)_n^i \right]^{1/2} - (\omega)_n \quad (25)$$

值得注意的是：(22)式至(25)式必須針對共振與反共振的邊界條件下分別計算。將式(25)代回式(21)即可計算移除第 $i$ 個元素對第 $n$ 模態之機電耦合因子的敏感度數字。

此外，根據式(21)所得之元素機電耦合因子敏感度其值可能為正、為負或為零。其值為正者，代表移除該元素將造成元件機電耦合因子的提升；反之，元素敏感度值為負者，代表移除該元素將造成元件機電耦合因子的下降。因此若欲最大化元件之機電耦合因子，則在每次最佳化演進過程中要盡量移除元素敏感度值最大之元素。

### 3.3 振動模態檢核

壓電元件在拓樸最佳化過程中，元件的振動模態將隨拓樸形狀產生變異。若初始設計共振模態為元件之第 $n$ 模態，則設計模態可能會隨演進過程而平移至第 $n+k$ 模態。為降低模態平移所造成的影響，文獻上[4]是以同時放大多個振動模態的機電耦合因子作為目標，再針對特定的模態予以較高的權重因子。然而嚴格來說，此種方式只能降低模態誤判的影響，並非真正克服模態平移的問題。為了促使演進過程中，每次都擷取預期之設計模態，因此本研究透過模態追蹤的方式，以克服移除元素後模態平移之問題，其方式如下：

首先對壓電元件的初始結構進行共振模態分析，並指定元件所預期達到共振振動模態為設計模態。假設元件在移除元素前，預定的設計模態為所有 $m$ 個輸出共振模態中的第 $n$ 個模態，將此共振設計模態向量表示為 $\{\psi_R\}_n$ 。並透過下式計算此模態向量的 $L_2$ 模長 (norm)。

$$(D_R)_n = \{\psi_R\}_n^T \{\psi_R\}_n \quad (26)$$

其次，在移除敏感度較低的元素之後，針對演進所得之新拓樸形狀的有限元素模型進行共振與反共振分析，並輸出 $m$ 個共振模態向量 $\{\psi_R\}_m$ 與反共振模態向量 $\{\psi_A\}_m$ （一般直接取前10個振動模態向量）。

最後，將上式中 $m$ 共振模態向量以及反共振模態向量，分別與 $\{\psi_R\}_n$ 內積，並減去式(26)，可計算在移動元素前後模態向量間之投影量與移除元素前設計模態向量大小平方值之差：

$$\Delta(D_R)_{(m)} = \{\psi_R\}_{(m)}^T \{\psi_R\}_n - (D_R)_n \quad (27a)$$

$$\Delta(D_A)_{(m)} = \{\psi_A\}_{(m)}^T \{\psi_R\}_n - (D_R)_n \quad (27b)$$

若上式計算所得之差值越小，代表移除元素後新拓樸形狀之共振或反共振模態若越接近元素移除前之設計模態，此模態及其對應之共振與反共振頻率即為所求。

### 3.4 其他輔助準則

除了模態平移的問題必須仰賴前述模態檢核的方式來克服之外，本文在利用ABAQUS[5]進行壓電元件模態分析的實作過程中亦發現兩個壓電元件模態分析的異常現象。此處的異常現象之一是指共振與反共振分析中所得的模態不相對應。理論上，雖然共振和反共振頻率是基於不同的電氣邊界條件下所得之結果，但一般第 $n$ 共振模態與第 $n$ 反共振模態是相互對應的，也就是 $\{\psi_A\}_n$ 會趨近於 $\{\psi_R\}_n$ 。但在拓樸最佳化的過程中，本文發現壓電元件隨著拓樸形狀的改變，可能產生新的振動模態。當新的模態產生時，儘管可透過模態檢核的方法判斷新生的模態是否與設計模態相同，但有時新生模態振動行為會與舊有模態行為過於相近，此時將導致模態檢核之誤判。在某些拓樸形狀時，共振條件下所追蹤到的模態數 $n$ 會與反共振條件下所追蹤到的模態數 $n$ 不相同，因此無法根據(20)式計算此時的動態機電耦合因子。

其二是在某些拓樸形狀之下，壓電元件的共振頻率與反共振頻率並非交錯出現。一般壓電元件之共振頻率會略小於反共振頻率，且會依次出現，亦即 $(\omega_R)_1 < (\omega_A)_1 < (\omega_R)_2 < (\omega_A)_2 < \dots$ 。然而在拓樸最佳化實作過程中會發現： $(\omega_R)_1 < (\omega_R)_2 < (\omega_A)_1 < (\omega_A)_2 < \dots$ ，此種現象表示在此拓樸形狀下，利用模態分析可能產生幽靈模態 (ghost mode)。所謂

幽靈模態，乃指設計之共振與反共振模態之頻寬內，產生另一促使元件短路，或斷路之頻率，由於此種頻率下之阻抗（或導納）並非極值，因此非實際之共振模態與反共振模態。然而利用模態分析無法計算各頻率下導納值，故元件產生幽靈模態時，無法判斷正確的設計模態為何，故無法利用(20)式正確計算此時的動態機電耦合因子。

最後，前述利用元素的敏感度作為元素移除的準則中並無考慮到穩定性的限制，也就是元素移除後可能會產生局部不穩定結構，此一問題是造成模態平移與模態不對應的主要原因。為解決元素穩定性的問題，文獻上[6]曾提出在移除過程中加入元素連接性的判斷準則。亦即在產生新的拓樸結構之後，隨即透過此一機制檢查元素的連接性，然後自動排除不穩定元素。但就筆者所知：迄今仍無完美的元素連接性準則可以對元素各種可能的連接情形進行穩定性判斷。

為改善上述之模態分析異常現象與局部不穩定問題，本文加入輔助準則進行元素移除的動作。也就是在移除某高靈敏度元素之後，若新的拓樸結構在進行模態分析時出現共振與反共振對應的模態不一或共振頻率與反共振頻率並非交錯出現的異常現象；以及基本振動模態之頻率接近於零（意謂有局部不穩定產生）時，代表前一步演進過程所移除的元素並不適當。此時必須將前一步移除的元素填補回去，再按元素敏感度的高低順序，另行移除其他敏感度值較高的元素。

綜合上述，利用最佳化演進法進行壓電元件機電耦合因子最大化之最佳拓樸形狀的整個流程可彙整如下：

- 一、將結構離散為有限元素網格，一般建議採用大小均勻之網格。
- 二、在既有之原件機械邊界條件下，針對不同電氣邊界條件分別進行共振與反共振模態分析，並輸出共振模態向量及反共振模態向量各 10 組。
- 三、透過模態檢核之方式擷取預期之設計模態及其反共振模態，若是元件初始設計狀態下，即第一共振模態與第一反共振模態，故無需進行模態追蹤。
- 四、將上述追蹤到之設計模態儲存紀錄作為下一次演進之模態追蹤依據，並計算對應設計模態之機電

耦合因子。

- 五、根據有限元素分析結果，利用(21)式計算各元素之機電耦合因子敏感度  $\Delta(K_d^2)_n$ 。
- 六、按各元素敏感度之大小予以排序，逐步移除高敏感度之元素。
- 七、為克服模態誤判以及避免產生新的模態導致之機電耦合因子墜降問題，移除元素後的拓樸結構必須滿足下述限制條件：
  - I. 若移除之元素導致擷取之共振與反共振模態數非對應，則前步驟被移除的元素不可移除。
  - II. 若移除元素後導致擷取反共振模態  $n$  之頻率值大於共振模態  $n+1$  頻率值，表示可能有幽靈模態產生，則前步驟被移除的元素亦可移除。
  - III. 檢核前步驟移除元素後，模態分析是否產生具有接近 0 Hz 之振動模態，若會產生不穩定元素，則該元素不可移除。
- 八、反覆上述步驟二至七，直到移除元素的體積達到預設的體積限制式則停止。

#### 四、數值實例

本節將進行壓電致動元件的拓樸最佳化設計。此致動元件係在彈性材料內嵌壓電材料，元件厚度為 5 mm，初始設計領域之材料分配與平面幾何尺寸如圖 1(a)所示。目標函數為提高元件之機電耦合因子，同時體積限制為等向性彈性材料體積移除率為 16.1%，而壓電材料體積與形狀均維持不變，設計模態為初始設計領域之第一共振模態。壓電材料與等向線彈性材料之材力係數如表一所示[4]。

由於其結構型式為雙對稱，因此最佳化過程中可採原始元件之 1/4，其對應的機械邊界條件為有限元素模型之左端及下端皆設為滾支承，同時利用平面應變（plane strain）元素進行模擬與分析，參見圖 1(b)所示。共振及反共振狀態下之電氣邊界條件則如圖 1(c)與圖 1(d)所示。

首先將結構離散為有限元素網格，一般建議採用大小均勻之網格。在本例題中等向線彈性材料元素大小皆為 0.5 mm × 0.5 mm 之平面應變元素（CPE8），共 316 個；

而壓電材料為元素大小 0.5 mm × 0.5 mm 之平面應變電氣元素 (CPE8E)，共 84 個。在既有之元件機械邊界條件下 (參見圖 1b)，針對不同電氣邊界條件分別進行共振與反共振模態分析，並輸出共振模態向量及反共振模態向量各 10 組。

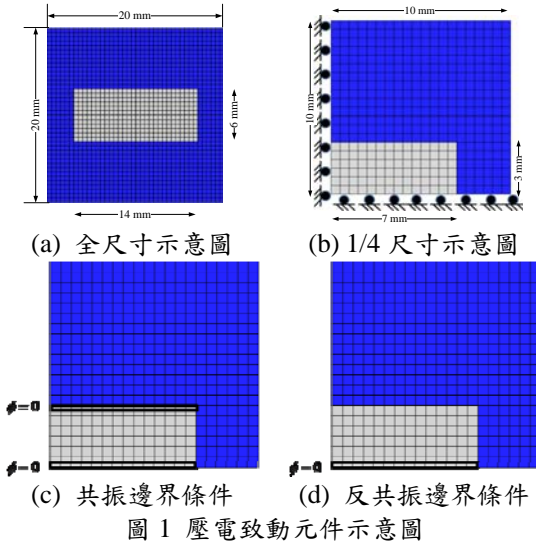


圖 1 壓電致動元件示意圖

結構最佳化演進法的原理在於結構物在承受外力時，並非所有元素皆均勻地承受外力，其中只有部分元素在受力過程中承擔大部分的外力，而其他的元素都處於無效率的狀態。因此，藉由逐步地移除這些不重要的元素，所留下來的元素集合便能夠漸漸地演進至拓模最佳化的形狀，此種過程就是最佳化演進的基本概念。

壓電元件在三維空間的整體行為，在忽略材料的磁、熱效應與遲滯的情況下，可以透過求解下列的偏微分方程式計算出：

表 1 壓電致動元件材料係數

壓電材料 (PZT5A) 之材料係數			
$c_{11}^E$	$1.11 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$	$\epsilon_{11}^S$	$7.37 \times 10^9 (\text{C/Vm})$
$c_{12}^E$	$7.52 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$\epsilon_{22}^S$	$8.12 \times 10^9 (\text{C/Vm})$
$c_{13}^E$	$7.52 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$\epsilon_{33}^S$	$8.12 \times 10^9 (\text{C/Vm})$
$c_{22}^E$	$1.21 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$	$d_{11}$	$3.74 \times 10^{10} (\text{mV})$
$c_{23}^E$	$7.54 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$d_{12}$	$-1.71 \times 10^{10} (\text{mV})$
$c_{33}^E$	$1.21 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$	$d_{13}$	$-1.71 \times 10^{10} (\text{mV})$
$c_{44}^E$	$2.10 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$d_{24}$	$5.84 \times 10^{10} (\text{mV})$
$c_{55}^E$	$2.10 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$d_{35}$	$5.84 \times 10^{10} (\text{mV})$
$c_{66}^E$	$2.30 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$	$\rho_p$	$7750 (\text{kg/m}^3)$

等向線彈性材料 (鋼) 之材料係數			
$E$	$200 \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$	$\nu$	0.32
$\rho_A$	$7850 (\text{kg/m}^3)$		

初始結構之第一共振模態為撓曲模態 (參見圖 2)，也就是元件之設計模態。此時的共振頻率  $f_A$  與反共振頻率  $f_R$  分別為 75631 Hz 與 88354 Hz，對應的機電耦合因子  $K_d$  為 51.70 %。此模態向量會先被紀錄起來，對於後續演進所得之結構，其模態分析所得的結果必須先透過模態檢核之方式擷取預期之設計模態及其反共振模態，再計算對應此模態下之機電耦合因子，最後再將擷取之模態設為新的設計模態俾利下一次演進的檢核。

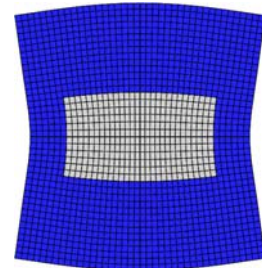
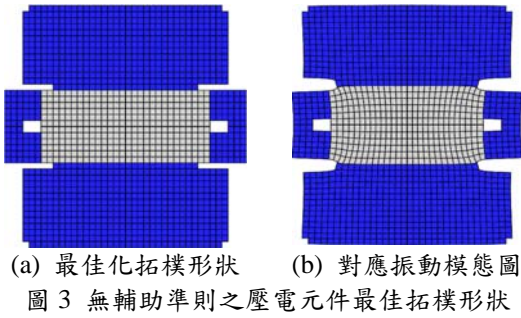


圖 2 壓電致動元件之設計模態圖

其次，根據共振與反共振模態分析的結果，配合 (21) 式計算各元素之機電耦合因子敏感度  $\Delta(K_d^n)$ ，並加以排序。在每次演進過程中逐步移除敏感度值最高的元素。重複這樣的步驟，直到移除元素的達到預設值為止。若無考慮前述之三個輔助準則，則移除後所得之拓模形狀如圖 3 (a) 所示，其對應之振動模態如圖 3 (b) 所示，而最佳化所得之最大機電耦合因子為 55.75 %。整個演進過程中機電耦合因子與移除體積比率 (RV) 之關係如圖 4 所示。

從機電耦合因子的演進歷時圖中可發現：機電耦合因子並非隨著移除體積比率的增加而單調遞增，而會有急遽上升與下降的階段。表 2 進一步列出前十二個演進過程中共振與反共振頻率及其對應之模態數。從表 2 中可發現：當共振與反共振之模態數不對應時會產生機電耦合因子的急速上升，然而此機電耦合因子的正確性是值得懷疑的。





(a) 最佳化拓模形狀 (b) 對應振動模態圖  
圖 3 無輔助準則之壓電元件最佳拓模形狀

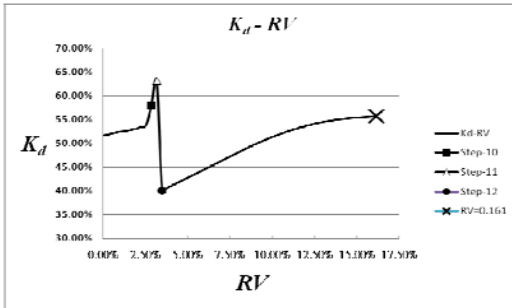


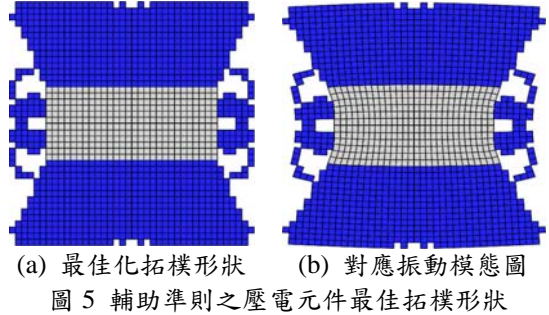
圖 4 無輔助準則之機電耦合因子大小與移除率關係圖

表 2 各演進步驟之模態分析結果與機電耦合因子

Step	$f_R$ (Hz)	$f_A$ (Hz)	$f_A$ 模態數	$f_R$ 模態數	$K_d$
1	75631	88354	1	1	51.70%
2	75622	88470	1	1	51.90%
3	75600	88635	1	1	52.20%
4	75649	88849	1	1	52.45%
5	75591	88868	1	1	52.58%
6	75380	88763	1	1	52.80%
7	75213	88745	1	1	53.08%
8	75017	88730	1	1	53.41%
9	74734	88686	1	1	53.84%
10	72387	88850	2	1	58.00%
11	68553	88359	2	1	63.10%
12	64528	70438	1	1	40.10%

前述在新的模態分析中所出現的異常現象(共振與反共振模態不相對應以及共振與反共振頻率不互相交錯)或出現局部不穩定,代表前一步驟所移除的元素應該存在而非移除。因此本文引入輔助準則,根據新的模態分析結果檢核是否有上述三種現象,視需要先填補回該元素,再依排序的結果移除其他高敏感度值的元素。重新演進所得之拓模形狀如圖 5 (a) 所示,其對應之振動模態如圖 5 (b) 所示,而最佳化所得之最大機電耦合因子為 56.50 %。整個演進過程中

機電耦合因子與移除體積比率 (RV) 之關係如圖 6 所示。從圖 6 中可發現:加入輔助準則後,機電耦合因子會隨著移除體積比率的增加而單調遞增,且最後所得之機電耦合因子較無輔助準則為大。



(a) 最佳化拓模形狀 (b) 對應振動模態圖  
圖 5 輔助準則之壓電元件最佳拓模形狀

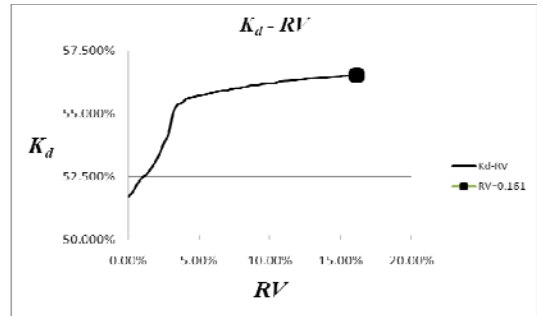


圖 6 輔助準則下機電耦合因子大小與移除率關係圖

其次,若壓電致動元件之初始幾何尺寸、材料性質與元素網格維持不變,但進一步移除等向性彈性材料體積移除率的限制,分別考慮設計模態為初始設計領域之第一共振模態及第二共振模態之最大化機電耦合因子的拓模最佳化設計。演進的流程如同前例,唯一不同是演進過程的停止準則:本例中等向性彈性材料元素因為無體積限制,故會配合輔助準則持續移除,直到機電耦合因子下降為止。

圖 7 列出了第一共振模態及第二共振模態之最大化機電耦合因子的拓模形狀和振動模態。表 3 為對應最佳拓模形狀的機電耦合因子與移除體積比率,從表 3 可發現:若以初始設計領域第一共振模態作為設計模態,則最終所得之拓模形狀的機電耦合因子大小提高將近 7 %,而此拓模之機電耦合因子大亦較前例中僅移除整體彈性材料 16 % 時為佳。另一方面,若以初始設計領域之第二共振模態作為設計模態,則最終所得之拓模形狀的機電耦合因子大小,相較初始設



計領域可大幅提高約 47%。此外機電耦合因子大小隨移除體積比率之歷時如圖 8 與圖 9 所示，由圖 8 與圖 9 可發現當體積移除比率達到某一上限值時，若再移除元素反而會造成整體元件的元件機電耦合因子的下降。

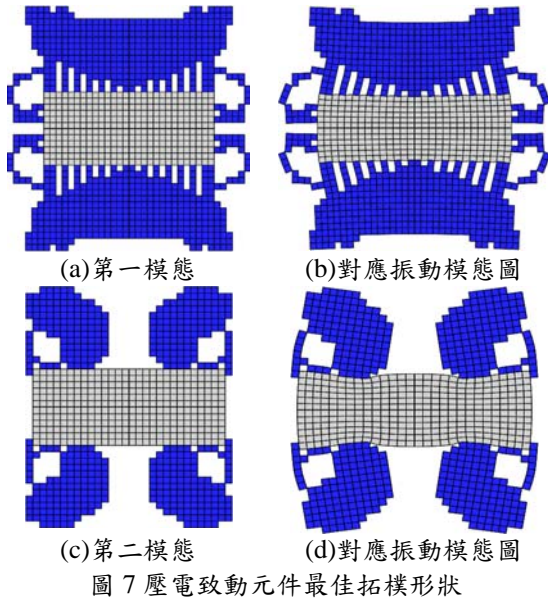


圖 7 壓電致動元件最佳拓模形狀

表 3 壓電元件機電耦合因子拓模最佳化結果

	第一模態	第二模態
初始之 $K_d$	$K_d = 51.7\%$	$K_d = 11.8\%$
最佳化之 $K_d$	$K_d = 59.0\%$	$K_d = 58.6\%$
移除體積比率	$RV = 37.3\%$	$RV = 62.3\%$

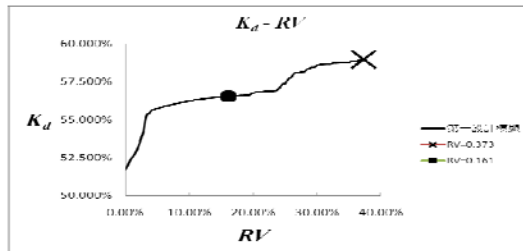


圖 8 第一模態之機電耦合因子演進歷時圖

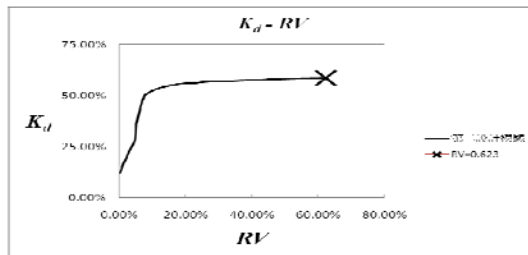


圖 9 第二模態之機電耦合因子演進歷時圖

## 五、結論

針對彈性材料內嵌壓電材料之壓電致動元件，本研究有別於過去文獻之方法，整合結構最佳化演進法與套裝有限元素軟體 ABAQUS 進行壓電致動元件之拓模最佳化設計。除了推導對應機電耦合因子的元素敏感度之外，對於最佳演進過程可能遇到模態平移問題，提出以模態追蹤每次演進之設計模態。同時，提出過去文獻中未考量之情況，包括新生模態之產生，模態不對應等問題，並利用輔助準則逐次搜尋可移除元素，本法可設計出最大化機電耦合因子之拓模形狀。

## 六、參考文獻

- [1] M. Naillon, "Analysis of piezoelectric structures by a finite element method," *Acta Electronica.*, vol. 25, pp. 341-362, 1983.
- [2] Y. M. Xie, and G. P. Steven, "A simple evolutionary procedure for structural optimization," *Comput. & Struct.*, vol. 49, no. 5, pp. 885-896, 1993.
- [3] Y. M. Xie, and G. P. Steven, "Evolutionary structural optimization for dynamic problems," *Comput. & Struct.*, vol. 58, no. 6, pp. 1067-1073, 1996.
- [4] E. C. N. Silva, and N. Kikuchi, "Design of piezoelectric transducers using topology optimization," *Smart Materials & Structures*, vol. 8, no. 3, pp. 350-364, 1999.
- [5] Dassault Systèmes Simulia Corp., ABAQUS Analysis User's Manual, Version 6.8, Providence, RI, USA, 2008
- [6] L. J. Leu, C. W. Huang, and J. J. Chou, "Topology Optimization of Elastic-plastic Structures," *Journal of Mechanics*, vol. 19, no.4, pp. 431-442, 2003.