

受軸壓旋轉複合疊層圓錐截柱殼基本振頻 對纖維角度之最佳化分析

胡宣德、張會昇
成功大學土木工程學系

摘要

複合疊層材料具備重量輕、高強度、高勁度、耐腐蝕、低導熱等優越特性，因此被廣泛應用在各種先進工程結構中。而結構物會受到外在環境的影響，產生振動並有可能造成共振現象，使結構體承受超過自身容許限度，導致過大變形而破壞。為了避免此現象，因此結構設計上，對於結構體自然振動頻率的分析課題必不可少。

本文使用 ABAQUS 有限元素軟體來分析複合疊層圓錐截柱殼之基本振動頻率，在受到不同邊界條件、幾何形狀、軸向壓力、旋轉速度等條件影響下，並利用黃金切割搜尋法來求出複合疊層圓錐截柱殼之最佳纖維角度及其對應之最高基本振動頻率。

設計受壓旋轉複合疊層圓錐截柱殼時，為了避開共振現象發生機率，可選擇適當的纖維角度與幾何形狀，以提高複合疊層圓錐截柱殼之基本振動頻率。其研究成果可供業界參考，相信對未來設計複合疊層圓錐截柱殼時會有所幫助。

關鍵字：複合材料、基本振動頻率、纖維角度、軸向壓力、旋轉速度

ABSTRACT

Composites possess light weight, high strength, high stiffness, corrosion resistance, low thermal conductivity and other superior characteristics. Composites is widely used in a variety of engineering structures. To avoid structures producing resonance phenomenon and to avoid materials exceeded the allowable limits, the natural frequency analysis of composites structures is essential topics.

In this study, using finite element analysis software ABAQUS to analyze laminated truncated conical shells's fundamental frequency. Subjected to the different boundary conditions ,geometric shapes, the axial pressure, rotational speed. The Golden section method is employed to find the optimal fiber orientations and its corresponding maximum fundamental frequency in the composite laminated cylindrical shells.

Design a compressed rotating laminated truncated conical shell, which can avoid the incidence of resonance phenomena. Select the appropriate angle and geometry of the fiber to improve the fundamental frequency of laminated truncated conical shells. The research results are valuable to the industry.

Keywords: composites、fundamental frequency、fiber angle、axial pressure、rotational speed

一、緒論

1.1 研究動機與目的

由於複合材料擁有高強度、質量輕、高勁度、低導熱、低導電及抗酸鹼腐蝕等優越特性，因此被廣泛應用在工業工程結

構。又因複合材料集中了高強度與質量輕的優勢，在汽車業、航太業或是其他工業裡，常使用複合材料來設計，能有效提升結構的穩定性與減少能量的消耗，已達到設計最佳目的。例如手機外殼、機械零件、戰鬥機的機身、跑車的車身外殼等，皆使用複材材料來設計。複合材料是由數種材

料加工而成，因此它與等向性的材料有很大的差別，所以應用在高精密度工程上時，如何研究出複合材料的特性非常重要。而結構可能會受外界影響產生共振現象，因此除了瞭解複合材料特性外，結構振動的分析亦是非常重要。

本文在進行複合疊層圓錐截柱殼的振動分析中，不考慮結構進入非線性的情形，探討在邊界條件為兩端皆為簡支端或固定端時，不同的幾何條件，如不同的軸向長度與上半徑跟下半徑之比值，以及不同的外力條件，如軸向壓力與轉速大小，在使用黃金分割搜尋法，找出複合疊層圓錐截柱殼最佳化纖維角度與其對應之最高基本振動頻率。

1.1 文獻回顧

複合材料在工程的應用，較常見的結構元件為複合疊層板。而複合疊層面板的自然頻率振動現象中之物理特徵，與系統的初始條件無關，而是由系統之特性而定。在未受力的情況時，複合疊層板的自然頻率受層板纖維角度 (Whitney, 1972 ; Olhoff, 1974 ; Bert, 1977 ; Chandrashekhara, 1989 ; Raouf, 1994) 或幾何形狀，如長寬比、層板厚度、層板挖洞尺寸 (Armondos and Negm, 1983 ; Lee, Lin and Chow, 1987 ; Ramakrishna and Rao, 1992 ; Topal and Uzman, 2008 ; Shin, Lee and Oh, 2009)、開孔形狀 (Gutierrez, Laura and Rossit, 2000) 或層板製造時所產生的內部缺陷問題，或相異邊界條件 (Whitney, 1970 ; Leissa and Narita, 1989 ; Baharlou and Leissa, 1993 ; Chai, 1994) ...等的影響。

另外，在受外力的情況下，複合疊層板的自然頻率高度受到疊層纖維角度 (Noor and Burton, 1992 ; Tenek, 2000 ; Chen et al., 2002 ; Chakrabarti et al., 2006)、疊層厚度 (Chen et al., 2002 ; Nayak et al., 2005、長寬比 (Chen et al., 2002 ; Chakrabarti et al., 2006); Chakrabarti et al., 2006)，與所受的初始壓力 (Dhanaraj and Palaninathan, 1990 ; Chen et al., 2002 ; Nayak et al., 2005 ; Chakrabarti et al., 2006; Sofiyev, 2009) ...等的影響。

目前複合疊層圓錐截柱殼受到軸壓及

旋轉的研究較少，僅有以 Timoshenko 梁來模擬複合疊層圓柱殼作靜態穩定性分析 (Pradhan and Chakraverty, 2013)與動態穩定性分析 (Pradhan and Chakraverty, 2013)，或是使用 Ritz 方法對圓柱殼做振動分析 (Leiw, Ng and Zhao, 2002)及圓柱殼改變溫度做振動分析 (Oh, 2009)，並無基本振頻最佳化的研究，因此本文以連續纖維的複合疊層圓錐截柱殼在受到軸壓及旋轉的情況下，探討在不同因素影響下對最佳纖維角度與最高基本振頻的關係。

二、材料勁度矩陣

2.1 殼元素簡介

殼的幾何形狀可視為一雙方向性的曲面板，各有其原始曲率且隨殼表面而變化。由於殼的曲率在受荷重變形時，受其薄膜變形與彎曲變形兩種作用相互影響，因此受力後之殼反應相當複雜。而彭弘維 (2010)在論文裡研究殼元素 S8R 來模擬複合疊層曲面板的可行性，其結果發現 S8R 殼元素分析複合疊層曲面板是符合實際情況，且殼元素 S8R 比其它元素多了一個 ψ_w 的自由度，不會忽視掉橫向剪切力的作用，所以本文選擇 S8R 殼元素來分析複合疊層圓錐截柱殼。

其中 ABAQUS 的 S8R 殼元素，每一個元素擁有 8 個節點與 4 個高斯積分點，每一個節點有 6 個自由度，分別為 X、Y、Z 方向的位移 U、V、W 及轉角 ψ_u 、 ψ_v 、 ψ_w 如(圖 2-2)。

2.2 材料主軸座標(1-2-3)系統下應力-應變關係

在分析複合材料時，每一疊層(lamina)皆視為正向性材料。假設方向 1、2 為疊層裡纖維的縱向與橫向，方向 3 為垂直疊層的方向如(圖 2-1)。根據廣義虎克定律 (generalized Hook's law)可求得，在主軸座標系統下的應力與應變關係為 (Jonse,1975)：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

其中 $\{\sigma\} = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}\}^T$:任一疊層材料之應力

$\{\epsilon\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\}^T$:任一疊層材料之應變、 $[Q]$:任一疊層材料之勁度矩陣 (stiffness matrix)

2.3 元素座標(X-Y-Z)系統下應力-應變關係

在有限元素分析時，要先把每一疊層材料主軸上的勁度矩陣從主軸座標系統轉換到元素座標系統上如(圖 2-1)，則元素座標系統上的應力與應變關係為(Jones,1975 ; Agarwal and Broutman,1990) :

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}\} &= \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\}^T \\ \{\bar{\epsilon}\} &= \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}^T \\ [\bar{Q}] &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 元素合應力與合力矩關係

假設 $\{\epsilon^0\} = \{\epsilon_x^0 \ \epsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0\}^T$ 為殼元素中平面(mid-surface)的應變，而 $\{K\} = \{K_x \ K_y \ K_{xy}\}^T$ 為殼元素中平面曲率，則在距離中平面z處之應變為：

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \{\epsilon^0\} + z\{K\}$$

透過廣義虎克定律(generalized Hook's law)，距離中平面z處的應力為：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \\ z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

處理殼的問題時，常取厚度上的合應力與合力矩為常用變數，假設複合疊層材料有n個疊層，各疊層間完美接合無瑕疵，總厚度為t，則在殼元素中，單位長度上的合應力與合力矩為：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

三、有限元素之振動分析

3.1 結構之振動方程式

將每個元素的 $[m]$ 、 $[c]$ 、 $[k]$ 與 $\{r^{ext}\}$ 累積至結構，對整體結構而言，可推得：

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R^{ext}\}$$

其中 $[M]$:結構質量矩陣、 $[C]$:結構組尼矩陣、 $[K]$:結構勁度矩陣、 $\{D\}$:結構自由度

且 $[M] = \sum_{i=1}^n [m]_i$ 、 $[C] = \sum_{i=1}^n [c]_i$ 、

$$[K] = [K_S] + [K_G] = \sum_{i=1}^n ([k_S]_i + [k_G]_i)$$

$$\{R^{ext}\} = \sum_{i=1}^n \{r^{ext}\}_i$$

而n為結構之元素數目。

3.2 基本頻率與振態之分析

對一結構系統之振動，若非初始直接施加動態荷重，而是在其初始靜平衡狀態下，給予一位移或加速度使其振動者，由此所產生的反應(response)稱之為自由振動(free-vibration)反應。在系統進行自由振動時，除了慣性力與維持振動之彈性恢復力之外，假設在無能量損失的情形發生下，則稱之為無阻尼自由振動(undamped free vibration)，此情況屬於理想化之分析模式。

在探討複合疊層圓柱殼的基本頻率時，本文不考慮時間變化之外荷重作用，並且假設複合疊層圓柱殼為無阻尼結構，因此將式(3.10)改寫為：

$$[M]\{\ddot{D}\} + \{[K_S] + [K_G]\}\{D\} = 0$$

若令 $\{D\}$ 為簡諧運動之位移矩陣，則可得：

$$\{D\} = \{\bar{D}\} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\{\ddot{D}\} = -\omega^2 \{\bar{D}\} \sin(\omega t + \varphi)$$

其中 $\{\bar{D}\}$ ：結點振幅、 φ ：相位角(phase angle)、 ω ：自然振頻(natural frequency) (Hz) 結合式(3.15)~(3.17)，且 $\sin(\omega t + \theta) \neq 0$ ，所以可得：

$$([K_S] + [K_G] - \omega^2[M])\{\bar{D}\} = 0$$

$$([K_S] + [K_G] - \lambda[M])\{\bar{D}\} = 0$$

其中 $\lambda = \omega^2$ 為特徵值問題。根據數學上的 Gramer's 法則(O' Neil, 1987)， $\{\bar{D}\}$ 必須有非零之解，否則無解(無振動產生)。

令 $\{\bar{D}\} \neq 0$ ，則 $|([K_S] + [K_G] - \lambda[M])| = 0$

當複合疊層圓柱殼所受的外力為零時， $[K_G]=0$ ，可推得： $|([K_S] - \lambda[M])| = 0$

此為無初始應力求解自然振動的特徵值問題，所求得的特徵值即為自然振頻的平方。當層板有初始應力時，則求解特徵值。

在 ABAQUS 程式中是以 subspace iteration 的方法 (Bathe and wilson, 1972 ; ABAQUS Inc., 2012) 求解式(3.18)的特徵值問題，設解得之特徵值為 λ_i ($i=1, 2, 3, \dots, N$)，而最小非零解的 λ_1 稱為基本振動頻率(fundamental vibration frequency) 即為本文欲最大化的振動頻率。

當基本振動頻率 ω_1 求出後，其對應的式為：

$([K] - \omega_1^2[M])\{\bar{D}\}_1 = \{0\}$ 並非唯一解，僅可解得比值關係，故將 $\{\bar{D}\}_1$ 無因次化，並假設其中某一幅值為某數值(假設令 $D_{k1}=1$)，透過比例關係可以將其他幅值定出，則可改寫成： $[K] - \omega_1^2[M])\{\Phi\}_1 = \{0\}$ 其中 $\{\Phi\}_1$ 稱為第一正規振態(normal mode shape)

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \vdots \\ \Phi_{N1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{D_{k1}} \begin{Bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \bar{D}_{21} \\ \vdots \\ \bar{D}_{N1} \end{Bmatrix}$$

因其為對應基本振動頻率 ω_1 之振動模態，所以稱為基本振動模態(fundamental mode) 或稱為第一振動模態(first mode)。

四、黃金切割搜尋法

4.1 黃金分割搜尋法

由黃金分割法是尋求出最大值或最小值的一種方法。假設有一函數為 $f(x)$ ， $x \in [0, 1]$ ，如(圖 4-1)當在此區間選取兩個測點(C、D)，此兩點在上下限距 τ 的位置。C、D 點各自對應函數值 $f(C)$ 、 $f(D)$ ，並比較之。假設 $f(C) > f(D)$ ，產生新的區間： $[0, 1-\tau]$ ，如(圖 4-2)。再來我們在新的區間，取一個新的測點(E)，並要與(圖 4-1)時所說到測點距上下限的距離比例一樣，如(圖 4-3)，透過這比例關係：

$$\frac{1-\tau}{1} = \frac{\epsilon}{1-\tau} \Rightarrow \epsilon = \tau^2 - 2\tau + 1, \text{ 又 } \tau = \epsilon, \text{ 可求得 } \tau = 0.382。$$

假設有一函數為 $f(x)$ ， $x \in [A, B]$ ，如(圖 4-4)，由上面推導，可求得 C、D 點實際位置：

$$C = \tau(B-A) + A = (1-\tau)A + \tau B$$

$$D = A + B - C = \tau A + (1-\tau)B$$

故：

$$C = (1 - 0.382) A + (0.382) B$$

$$D = (0.382) A + (1 - 0.382) B$$

假設一函數區間為 L，為了提高準確度，希望精度控制在 1% 的精度，即為收斂到區間為 0.01L，而每次區間會縮小 $(1-\tau)$ 倍，即： $(1-\tau)^n = 0.01$ ，可求得 $n = 9.6$ ，故需分割 10 次，才可得到 1% 的精度。

五、數值分析之模擬

5.1 問題敘述

選用的分析材料為石墨-環氧樹脂，其別稱碳纖維，其結構為複合疊層圓錐截柱殼(圖 5-1)，圓錐截柱殼兩端半徑為 R_1 與 R_2 。複合圓錐截柱殼之疊層排列方式為 $[\pm\theta/90^\circ/0^\circ]_{2s}$ ，分析時 θ 僅考慮由 0° 變化到 90° ，每次增加 10° 。每層厚度 $h=0.125\text{mm}$ ，共取 16 層總厚度為 2 mm。而材料的機械常數(Grawley, 1979) 如下：
 $E_{11} = 128 \text{ GPa}$ 、 $E_{22} = 11 \text{ GPa}$ 、 $\nu_{12} = 0.25$
 $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ 、 $G_{12} = 4.48 \text{ GPa}$ 、 $G_{13} = 4.48 \text{ GPa}$ 、 $G_{23} = 1.53 \text{ GPa}$

本文對於複合疊層圓錐截柱殼之分析，主要分為以下幾種條件來組合進行探討。其中圓柱座標定義為：

$$\begin{cases} x \rightarrow u(r) \\ y \rightarrow v(\theta) \\ z \rightarrow w(\text{軸向}) \end{cases} ; \text{而軸向壓力為均佈力施}$$

加在半徑 R_2 的圓周上。

1. 邊界條件(圖 5-2)
 - I. 兩端均為固定端
 - II. 兩端均為簡支端
2. 半徑 R_2 與半徑 R_1 比值($R_1=0.1m$)
 - I. 半徑 R_2 與半徑 R_1 比值
[$R_2/R_1=1.0$]
 - II. 半徑 R_2 與半徑 R_1 比值
[$R_2/R_1=0.8$]
 - III. 半徑 R_2 與半徑 R_1 比值
[$R_2/R_1=0.6$]
3. 軸向長度與半徑 R_1 比值($R_1=0.1m$)
 - I. 複合疊層圓柱殼軸向長度 L 比上圓錐殼半徑 R_1
[$L/R_1=1.0$]
 - II. 複合疊層圓柱殼軸向長度 L 比上圓錐殼半徑 R_1
[$L/R_1=2.0$]
 - III. 複合疊層圓柱殼軸向長度 L 比上圓錐殼半徑 R_1
[$L/R_1=3.0$]
 - IV. 複合疊層圓柱殼軸向長度 L 比上圓錐殼半徑 R_1
[$L/R_1=4.0$]
4. 軸向壓力
 - I. 無軸向壓力($N=0$)
 - II. 在軸向方向受到複合疊層圓錐截柱殼 20%的扭曲載重
($N=0.2Ncr$)
 - III. 在軸向方向受到複合疊層圓錐截柱殼 40%的扭曲載重
($N=0.4Ncr$)
 - IV. 在軸向方向受到複合疊層圓錐截柱殼 60%的扭曲載重
($N=0.6Ncr$)
 - V. 在軸向方向受到複合疊層圓錐截柱殼 80%的扭曲載重
($N=0.8Ncr$)

5. 旋轉速度

- I. 轉速為 0 RPM
- II. 轉速為 10000 RPM
- III. 轉速為 20000 RPM

依上述第 2、第 3 點條件，幾何條件變化共有 12 種模型，再配合第 1、第 4、第 5 點條件進行組合，分析複合疊層圓錐截柱殼纖維角度及基本振動頻率之影響。

而 12 種模型在使用不同纖維角度時，所產生的扭曲值會不同，因此各纖維角度的扭曲值求出後，再依此值按比例大小加載軸向壓力。以每 10° 為一區間來求出纖維角度及基本振動頻率的關係圖，並判斷出極值區間。再根據本文第四章黃金分割法所述，經多次分割後， $\Delta\theta < 0.5^\circ$ 收斂，找出複合疊層圓錐截柱殼最佳纖維角度及最高基本振動頻率。另外，本文隨機抽取幾組在 10° 區間內的數值，是否會發生數值產生極大變化，經過隨機抽取測試發現數值並無極大變化，故可以排除此情況。

由上述可知，本文的數值分析很多，因此本文使用在 ABAQUS 裡面的錄製功能，把從剛開始的模型建立到最後的結果分析的操作步驟全部錄製下來，並使其轉換成 Python 檔。透過開啟 Python 檔修改裡面的程式語言與參數(如：模型、軸力、轉速、mesh 等)，可以把本來使用 ABAQUS 時，一次只能分析一個模型的劣勢，優化成一次可以跑多個分析的優勢，使本文在數值分析時，可以減少無數的時間。

5.2 基本振動頻率之元素收斂性分析

由於有限元素分析中，對元素進行收斂性分析很重要，其主要目的是確認有限元素模型之正確性。最後，將實驗模態分析與有限元素分析之結果進行比較驗證，若發生不符合時，則須適當的邊界條件或修正材料特性，因在有限元素分析模型建立前，結構之幾何形狀通常已明確定義，而經由邊界條件或材料特性反覆修正，即可獲得模擬實際結構之有限元素模型。

本文以 [$145^\circ/90^\circ/0^\circ$]_{2S} 的複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=4$ 、 $0.4Ncr$ 、20000 RPM 下，進行基本振動頻率的收斂

性分析。將模型環向切割成 8、16、24、32、40、48 等份，其元素數目可分為 40、160、360、640、1000、1488 個。由(表 5-1)與(圖 5-3)所示，在元素數目 360 個之後，頻率開始平緩，並趨向於定值。本文以環向切成 48 等份為基準，軸向則分割為：

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2/R_1 = 1 : 8、15、23、31 \text{ 等份} \\ R_2/R_1 = 0.8 : 9、17、25、34 \text{ 等份} \\ R_2/R_1 = 0.6 : 10、19、29、38 \text{ 等份} \end{array} \right.$$

，而複合疊層圓錐截柱殼網格分割如(圖 5-4)。

六、結論與建議

6.1 結論

本文採用 ABAQUS 有限元素軟體分析複合疊層圓錐截柱殼之最高基本振動頻率，而影響複合疊層圓錐截柱殼的因素眾多，如邊界條件、纖維角度、半徑比值(R_2/R_1)、軸向長度(L/R_1)、轉速大小、軸向壓力大小等參數，皆會影響其分析結果，因此歸納出幾點結論如下：

6.1.1 複合疊層圓錐截柱殼最佳纖維角度

1. 半徑比值(R_2/R_1)：纖維角度的變化沒有規律性，其原因可能是 R_2/R_1 比值間求出的挫曲值相差太多，因此難以觀察出角度變化性質。
2. 軸向長度(L/R_1)：
 - a. $R_2/R_1=1$ ：在不同軸向壓力與 0、10000 RPM 下，纖維角度大致上規律為： $\theta_{L/R1=3} > \theta_{L/R1=1} > \theta_{L/R1=2} > \theta_{L/R1=4}$ 。在 20000 RPM 與不同軸向壓力下，纖維角度大致上規律為： $\theta_{L/R1=1} \geq \theta_{L/R1=2} > \theta_{L/R1=3} > \theta_{L/R1=4}$ 。
 - b. $R_2/R_1=0.8$ ：在不同軸向壓力與轉速下，纖維角度大致上規律為： $\theta_{L/R1=4} > \theta_{L/R1=2} > \theta_{L/R1=1} > \theta_{L/R1=3}$ 。

- c. $R_2/R_1=0.6$ ：纖維角度的變化沒有規律性。
3. 軸向壓力大小：大致上隨著軸向壓力的增加，會導致角度上升的情況。不過在 $R_2/R_1=0.6$ 時，雖有此現象，但其大致上平緩的水平線居多。
4. 轉速速度大小：不論參數變化為何，大致上最佳纖維角度呈現 $\theta_0 \text{ RPM} > \theta_{10000 \text{ RPM}} > \theta_{20000 \text{ RPM}}$ 的趨勢。
5. 本文最後歸納出圓錐截柱殼在通盤設計下，其最佳纖維角度的設計值，如表格(表 6-1 至表 6-3)所示。

6.1.2 複合疊層圓錐截柱殼最高基本振動頻率

1. 邊界條件：複合疊層圓錐截柱殼會受到邊界條件不同，而造成其基本振動頻率會受到影響，發現兩端為固定端會大於兩端為簡支端的基本振動頻率。另外，軸向長度越短，受邊界條件影響越大。
2. 半徑比值(R_2/R_1)：由結果顯示，不論參數如何變化下，發現最高基本振動頻率皆呈現： $\omega_{R2/R1=0.6} > \omega_{R2/R1=0.8} > \omega_{R2/R1=1}$
3. 軸向長度(L/R_1)：由結果顯示，基本振動頻率會隨著軸向長度(L/R_1)變大時，隨之變低。 $\omega_{L/R1=1} > \omega_{L/R1=2} > \omega_{L/R1=3} > \omega_{L/R1=4}$ 。
4. 軸向壓力大小：由結果顯示，不論參數如何變化下，隨著軸向壓力增加，基本振動頻率隨之下降。
5. 轉速速度大小：由結果顯示，不論參數如何變化下，隨著轉速外力增加，基本振動頻率隨之上升。 $\omega_{20000 \text{ RPM}} > \omega_{10000 \text{ RPM}} > \omega_0 \text{ RPM}$ 。

6.1.3 複合疊層圓錐截柱殼模態圖：

1. 半徑比值(R_2/R_1)：由結果顯示，不論參數如何變化下，隨著 R_2/R_1 比值變小，會使圓錐截柱殼之模態的環向波數變少或沒變化。
2. 軸向長度(L/R_1)：隨著軸向長度越長，圓錐截柱殼之模態的環向波數越少，可能是整體的相對細長比越長，結構受到剪力作用不明顯。
3. 軸向壓力大小：軸向壓力的施加，對於圓錐截柱殼之模態的環向波數沒有特定的規律，但整體來看，沒有變化的居多。
4. 旋轉速度大小：隨著轉速增加，對於圓錐截柱殼之模態的環向波數沒有特定的規律，但整體來看，沒有變化的居多。

6.2 建議事項

1. 本文使用的材料為 Graphite-Expoxy，分析複合疊層圓錐截柱殼求得的最佳纖維角度與最高基本振動頻率，其使用疊層角度 $[\pm\theta/90^\circ/0^\circ]_{2s}$ ，未來可以用其他疊層厚度與纖維角度或複合材料，做更深入的研究，相信未來使複合材料更加推廣。
2. 一般結構都會有開孔的現象，因此未來可對圓錐截柱殼做局部開孔之分析研究，但是開孔處可能產生應力集中的現象，所以這方面的研究值得進行探討。
3. 對於模態圖的變化沒有找到明顯規律，可以試著半徑比值(R_2/R_1)、軸向壓力大小、轉速外力大小、開孔大小與開孔數等參數，做更深入的研究，找出其規律對設計上有很大幫助。

6.3 比較結果與討論

若把改良 Powell 方法與網格搜尋法的結果相比較，將可得到**錯誤! 找不到參照來源。**至**錯誤! 找不到參照來源。**的結果。其中，Total time 的 Error 指的是網格搜尋

法的耗時為改良 Powell 方法耗時的倍數。

如果將改良 Powell 方法變動方板三層的結果也納入，還可以得到如**錯誤! 找不到參照來源。**、**錯誤! 找不到參照來源。**的比較結果。

在結果比較表中，可發現會有目標函數值相近，但點位卻有一定距離差異的現象，這是因為其等高線圖皆具有相當的對稱性，而演算法恰巧搜尋到網格搜尋法的最佳解的對稱點附近所致，特此說明。

從結果可看出，當邊界條件較簡單(僅單方向固定，如長板短邊固定、長板長邊固定、方板單方向固定)時，演算法求得的解品質相當優良。若從等高線圖上來看，可發現這一類邊界條件的等高線圖皆有接近單個坡谷的現象，長板長邊固定的等高線圖 (**錯誤! 找不到參照來源。**) 雖無法立即看出此點，但若將角度轉換為 -90 度至 90 度後便可看出其具有相同趨勢。

對於四邊固定的邊界條件，演算法求得的解品質則有待加強。從等高線圖(**錯誤! 找不到參照來源。**) 上來看，可以發現方板在此情況下搜尋條件並不惡劣，依然能夠看出有單個坡谷的現象(這其實跟底層固定為 0 度有關，爾後一併討論)，因而獲得不錯的結果。然而，長板四邊固定所產生的等高線圖 (**錯誤! 找不到參照來源。**) 卻是個對最佳化搜尋極其具有挑戰性的問題；不但沒有單個坡谷的現象，還擁有許多區域最佳解，使得搜尋難度極高，也因此造成所有最佳化結果中最差的一個。

在方板方面，如果使用本演算法將第三層疊層角度也當作可動疊層的話，就能夠做出更佳的結果。在四邊固定的情況下雖然並沒有太多的幫助，但在單方向固定的情況下，卻是一口氣將目標函數值降低到原來的 30.58%、網格搜尋法結果的 31.08%，達到極大幅度的改善。

上述的結果中，能夠看得出來求解的難易(等高線圖趨近單個坡谷與否)顯然與邊界條件的複雜性有關。然而，對於方板來說，四邊固定的情形卻沒有出現如長板四邊固定的惡劣搜尋條件；同時，即使解除底層疊層不可旋轉的限制，也沒有辦法讓演算法大幅度地改善解的品質。為

此，本研究額外再對一組方板四邊固定且僅有兩層的模型做一次網格搜尋法，結果如**錯誤！找不到參照來源**。所示，便能發現其將會出現類似長板四邊固定等高線圖的趨勢，開始出現多個區域最佳解，如此便可解釋上述兩個疑問。

此外，在運算時間上，可看出不論解的品質好壞，演算法皆可在數分鐘之內完成；相較之下，網格搜尋法的運算時間則皆需數百甚至千倍才能確定一個最佳解，並且此運算時間還會隨著疊層數目的增加而呈現指數性的成長，成為不切實際的搜尋方法。

七、參考文獻

- [1] Abaqus Inc., ABAQUS User and Theory Manuals, Version 6.12, Providence, RI., 2013.
- [2] Abrate, S., "Optimal Design of Laminated Plates and Shells," *Composite Structures*, Vol. 29, No. 3, pp. 269-286, 1994.
- [3] Baharlou, B., and Leissa, A. W., "Vibration and Buckling of Generally Laminated Composite Plates with Arbitrary Edge Conditions," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 29, pp. 545-555, 1993.
- [4] Bathe, K. K., and Wilson, E. J., "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 98, pp. 1471-1485, 1972.
- [5] Bert, C. W., "Optimal Design of a composite Material Plate to Maximize," Vol. 50, No. 2, pp. 229-237, 1977.
- [6] Bert, C. W., "Literature Review-Research on Dynamic Behavior of Composite and Sandwich Plates-V : Part II," *The shock and Composite and Vibration Digest*, Vol. 23, No. 7, pp. 9-21, 1991.
- [7] Bhagwan, D. A., and Lawrence J. B., "Analysis and Performance of Fiber Composite," Second Edition, Wiley, New York, 1990.
- [8] Braus, J., Baureis, H. P., Bickle, W., "Composite Material for Sliding Surface Bearings" United States Patent Office NO. 4,847,135, 1989.
- [9] Cairns, J. W., Hill, C., "Composite Bearings," United States Patent Office NO. 3,909,087, 1975.
- [10] Chai, G. B., "Free Vibration of Generally Laminated Composite Plates with Various Edge Support Condition," *Composite Structures*, Vol. 29, No. 3, pp. 249-258, 1994.
- [11] Chakrabarti, A., Topdar, P., and Sheikh, A. H., "Vibration of Pre-Stressed Laminated Sandwich Plates with Interlaminar Imperfections," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 128, No. 6, pp. 673-681, 2006.
- [12] Chandrashekhara, K., "Free Vibration of Anisotropic Laminated Doubly Curved Shells," *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 6, pp. 435-440, 1989.
- [13] Chen, C.S., Cheng, W.S., Chien, R.D., and Doong, J.L., "Large Amplitude Vibration of an Initially Stressed Cross Ply Laminated Plates," *Applied Acoustics*, Vol. 63, No. 9, pp. 939-956, 2002.
- [14] Chen, L. W., and Peng, W. K., "The stability behavior of rotating composite shafts under axial compressive loads," *Composite Structures*, Vol. 41, No. 3-4, pp. 253-263, 1998.
- [15] Chen, L. W., and Peng, W. K., "Dynamic stability of rotating

- composite shafts under periodic axial compressive loads,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212 , No. 2, pp. 215-230, 1998
- [16] Chun, L., and Lam, K. Y., “Dynamic Analysis of Clamped Laminated Curved Panels,” *Composite Structures*, Vol. 30, No. 2 ,pp. 389-398, 1995.
- [17] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Third Edition, Chapter 13, Wiley, New York, 1989.
- [18] Crawley, E. F., “The Natural Modes of Graphite/Epoxy Cantilever Plates and Shells,” *Journal of Composite Materials*, Vol. 13, No. 3, pp. 195-205, 1979.
- [19] Deolasi, P. J., and Datta, P. K., “Parametric instability Characteristics of Rectangular Plates Subjected to Localized Edge Loading (Tension or Compression),” *Computer & Structures*, Vol. 54, No. 1, pp. 73-82, 1995.
- [20] Dhanaraj, R., and Palaninathan, “Free Vibration of Stressed Composite Composite Laminates,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, No. 3, pp. 365-378, 1990.
- [21] Dickinson, S. M., “Lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-plane Forces,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, No. 4, pp. 465-472, 1971.
- [22] Duffy, K. J., and Adali, S., “Optimal Fiber of Antisymmetric Hybrid Laminates for Maximum Fundamental Frequency and Frequency Separation ,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, No. 2, pp. 181-190, 1991.
- [23] Fisher, C. A., Ewing, M. S., and Leissa A. W., “Vibration of Unsymmetrically Laminated Subjected to In-plane Initially Stressed,” *Composite Structures 4*, Proceedings of the 4th International Conference, pp. 1461-1475, 1987.
- [24] Pradhan K.K., Chakraverty S., “Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method,” *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, No. 2, pp. 175-184, 2013.
- [25] Fukunaga, H., Sekine, H., and Sato, M., “Optimal Design of Symmetric Laminated Plates for Fundamental Frequency,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171, No. 2, pp. 219-229, 1994.
- [26] Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A., and Rossit, C. A., “Fundamental Frequency of Transverse Vibration of a Clamped Rectangular Orthotropic Plate with a Free-Edge Hole,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 235, No. 4, pp. 697-701, 2000.
- [27] H.P. Lee., “Dynamic Stability of Spinning Pre-Twisted Beams Subject to Axial Pulsating Loads,” *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. Vol. 127 , No. 4, pp. 115-126, 1995.
- [28] Hu, H. T., and Wang, S. S., “Optimization for Buckling Resistance of Fiber-Composite Laminate Shells with and without Cutouts,” *Composite Structures*, Vol. 22, pp. 3-13, 1992.
- [29] Hu, H. T., *Theory of Plates*, Department of Civil Engineering National Cheng Kung University Tainan Taiwan, 2011.

- [30] Hu, H. T., and Tasi, J. Y., "Maximization Of The Fundamental Frequencies Of Laminated Cylindrical Shells With Respect To Fiber Orientations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 4, pp. 723-740, 1999.
- [31] Irons, B. M., "The Semi-Loof Shell Element," In: Ashwell, D. G.; Gallagher, R. H. (ed.) *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Wiley, New York, pp. 197-222, 1976.
- [32] Jawad, M. H., "Theory and design of plate and shell structures," First Edition, Chapter 11-12, p. 300-349, 1994.
- [33] Kolman, B., and Beck, R. E., *Elementary Linear Programming with Applications*, Academic Press, Orlando, pp. 59-142, 1980.
- [34] Leissa, A. W., and Kadi, A. S., "Curvature Effects on Shallow
- [35] Shell Vibrations," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 16, No.2, pp. 173-183, 1971.
- [36] Leissa, A. W., and Ayoub, E. F., "Vibration and Buckling of A Simply Supported Rectangular Plate Subjected to a Pair of In-plane Concentrated Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, No. 1, pp. 155-171, 1988.
- [37] Leiw, K. M., Ng, T. Y., and Zhao, X., "Vibration of Axially Loaded Rotating Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells Via Ritz method," [Journal of Engineering Mechanics](#), Vol. 128, No. 9, pp. 1001-1007, 2002.
- [38] Leissa, A. W., and Narita, Y., "Vibration Studies for simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates," *Composite Structures*, Vol. 12, No. 5, pp. 113-132, 1989.
- [39] Liu, H. W., and Hung, C. C., "Free Vibrations of Thick Cantilever Laminated Plates with Step-Change of Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 5, pp. 601 - 618, 1994.
- [40] Lou, K. A., and Yaniv, G., "Buckling of Circular Cylindrical Composite Shells Under Axial Compression and Bending Loads," *Journal of Composite Materials*, Vol. 25. No. 2, p. 162-187,1991.
- [41] Narita, Y., and Leissa, A. W., "Frequency And Mode Shapes Of Cantilevered Laminated Composite Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 1, pp. 161-172, 1992.
- [42] Narita, Y., and Leissa, A. W., "Frequency And Mode Shapes Of Cantilevered Laminated Composite Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 1, pp. 161-172, 1992.
- [43] Nayak, A. K., Moy, S. S. J., and Shenoi, R. A., "A Higher Order Finite Element Theory for Buckling and Vibration Analysis of Initially Stressed Composite Sandwich Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286, No. 4-5, pp. 763-780, 2005.
- [44] Noor, A. K., and Burton, W. S., "Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, No. 4, pp. 868-877 ,1992.
- [45] O'Neil, P. V., *Advanced Engineering Mathematics*, Second Edition, Chapter 10, 1987.
- [46] Oh IK., "Damping characteristics of cylindrical laminates with viscoelastic layer considering temperature-

- and frequency-dependence,” J Therm Stresses, Vol. 32, No. 1, 2009
- [47] Onoda, J., “Optimal Laminate Configurations of Cylindrical Shells for Axial Buckling,” AIAA Journal, Vol. 23, pp 1093-1098, 1985.
- [48] Qatu, M. S., and Leissa, A. W., “Natural Frequencies for Cantilevered Doubly Curved Laminated Composite Shallows Shells,” Composite Structures, Vol. 17, pp. 227-255, 1991.
- [49] Ramakrishna, S., and Rao, N. S., “Free Vibration Analysis of Laminates with Circular Cutout by Hybrid Stress Finite Element,” Composite Structures, Vol. 21, pp. 177-185, 1992.
- [50] Raouf, A. R., “Tailoring the Dynamic Characteristics of Composite Panels Using Fiber Orientation,” Composite Structures, Vol. 29, pp. 259-267, 1994.
- [51] Reddy, J. N., “Free Vibration Of Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates Including Transverse Shear Deformation By The Finite Element Method ,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, No. 4, pp. 565-576, 1979.
- [52] Robert, M. J., Mechanics of Composite Materials, Chapter 2, pp. 45-51, 1975.
- [53] Sharma, C. B., and Darvizeh, M., “Free Vibration of Specially Orthotropic, Multilayered, Thin Cylindrical Shells with Various End Condition,” Composite Structures, Vol. 7, No. 2, pp. 123-138 , 1987.
- [54] Sofiyev AH., “The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure,” Composite Structures, Vol. 89, No.2, pp. 356-366
- [55] Sankaranarayanan, N., Chandrasekaran, K. and Ramaiyan, G., “Free Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness,” Journal of sound and Vibration, Vol. 123, No. 2, pp. 357-371 , 1988.
- [56] 歐勝昌, “對稱複合疊層圓錐截柱殼之基本振動頻率及其纖維角度受幾何形狀及邊界條件之影響,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 88 年 6 月
- [57] 黃翊璋, “受壓旋轉複合疊層圓柱殼基本振頻對纖維角度之最佳化分析,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 102 年 7 月.
- [58] 侯明輝, “幾何形狀及邊界條件對複合層板基本振動頻率及其纖維角度的影響,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 83 年 6 月.
- [59] 陳培仁, “複合疊層圓錐殼受軸壓的最佳化自然振動分析,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 100 年 6 月.
- [60] 陳俊銘, “複合疊層曲面板受軸壓的最佳化自然振動分析,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 93 年 6 月.
- [61] 楊景森, “受壓複合疊層曲面板之最佳挫屈強度及其纖維角度受幾何形狀界條件之影響,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 88 年 6 月.
- [62] 蔡文魁, “複合疊層板受單軸壓力的最佳化自振分析,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 90 年 1 月.
- [63] 樊庭宇, “應用 Reissner 混合變分原理之有限圓柱層殼元素法於功能性材料三明治圓柱殼結構之三維自然振動分析,” 國立成功大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國 101 年 7 月

八、表格

表 5-1 [$\pm 45^\circ/90^\circ/0^\circ$]_{2S} 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=4$ 、 $0.4Ncr$ 與 20000 RPM 下，其邊界條件為兩端 Fixed，作元素收斂性分析。

元素數目	頻率 (frequency,Hz)	誤差(error,%)
40 (8x5)	1171.1	7.1553
160 (16x10)	1103.5	0.9699
360 (24x15)	1097	0.3751
640 (32x20)	1095	0.1921
1000 (40x25)	1093.8	0.0823
1488 (48x31)	1092.9	0

表 6-1 [$\pm\theta/90^\circ/0^\circ$]_{2S} 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=1$ 時，隨著不同的轉速與軸向長度 L/R_1 變化下之最佳化之纖維角度。

旋轉 轉速	軸向 長度	$L/R_1=1$	$L/R_1=2$	$L/R_1=3$	$L/R_1=4$
	0 RPM		50°	45°	60°
10000 RPM		50°	45°	53°	30°
20000 RPM		50°	45°	35°	30°

表 6-2 [$\pm\theta/90^\circ/0^\circ$]_{2S} 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=0.8$ 時，隨著不同的轉速與軸向長度 L/R_1 變化下之最佳化之纖維角度。

旋轉 轉速	軸向 長度	$L/R_1=1$	$L/R_1=2$	$L/R_1=3$	$L/R_1=4$
	0 RPM		47°	70°	46°
10000 RPM		48°	70°	40°	75°
20000 RPM		50°	60°	35°	65°

表 6-3 [$\pm\theta/90^\circ/0^\circ$]_{2S} 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=0.6$ 時，隨著不同的轉速與軸向長度 L/R_1 變化下之最佳化之纖維角度。

旋轉 轉速	軸向 長度	$L/R_1=1$	$L/R_1=2$	$L/R_1=3$	$L/R_1=4$
	0 RPM		52°	58°	70°
10000 RPM		50°	55°	70°	65°
20000 RPM		45°	46°	70°	52°

九、圖片

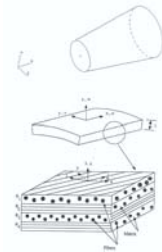


圖 2-1 複合疊層圓錐截柱殼結構示意圖

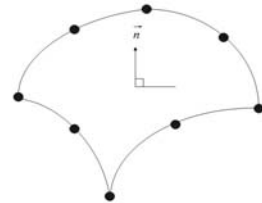
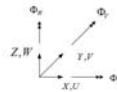


圖 1-2 S8R 殼元素示意圖

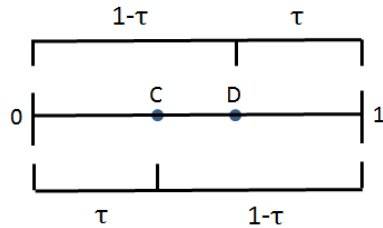


圖 4-1 黃金切割搜尋法(A)

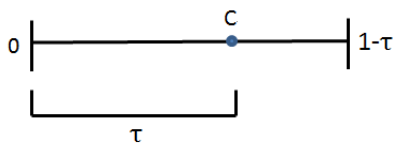


圖 4-2 黃金切割搜尋法(B)

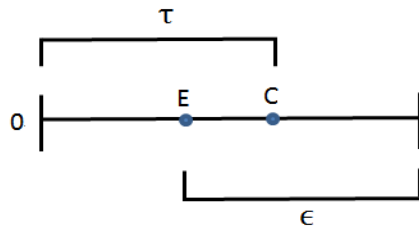


圖 4-3 黃金切割搜尋法(C)

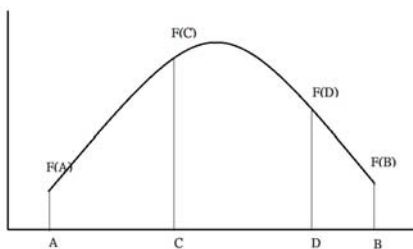


圖 4-4 黃金切割搜尋法(D)

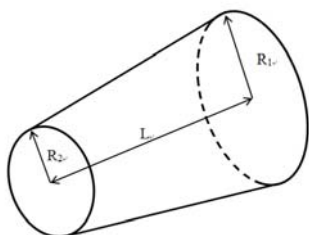


圖 5-1 複合疊層圓錐截柱殼示意圖

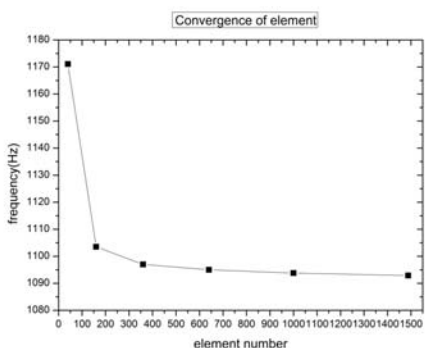


圖 5-2 $[\pm 45^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=4$ 、 $0.4Ncr$ 、 20000 RPM 下之元素收斂性分析結果圖

$R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=3$	$R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=4$
$R_2/R_1=0.8$ 、 $L/R_1=1$	$R_2/R_1=0.8$ 、 $L/R_1=2$
$R_2/R_1=0.8$ 、 $L/R_1=3$	$R_2/R_1=0.8$ 、 $L/R_1=4$
$R_2/R_1=0.6$ 、 $L/R_1=1$	$R_2/R_1=0.6$ 、 $L/R_1=2$
$R_2/R_1=0.6$ 、 $L/R_1=3$	$R_2/R_1=0.6$ 、 $L/R_1=4$

圖 5-3 各尺寸的 $[\pm 0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ 複合疊層圓錐截柱殼之網格切割圖

$R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=1$	$R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=2$

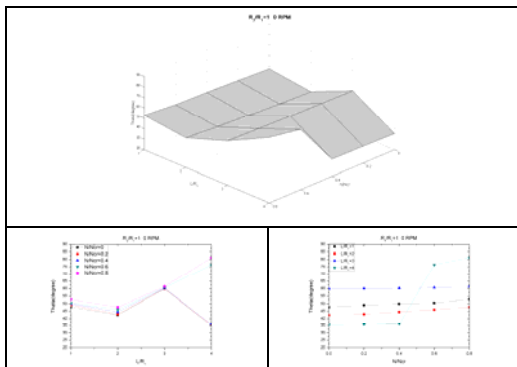


圖 5-4 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=1$ 、轉速 0 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最佳纖維角度之關係圖。

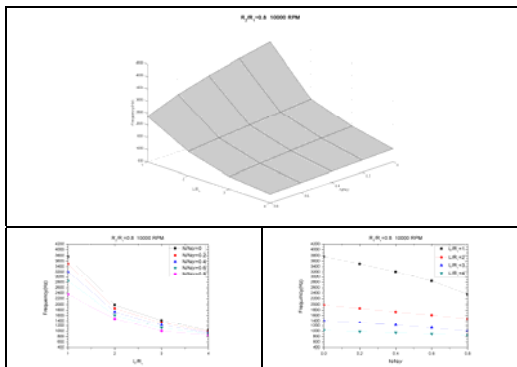


圖 5-7 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=0.8$ 、轉速 10000 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最高基本振動頻率之關係圖。

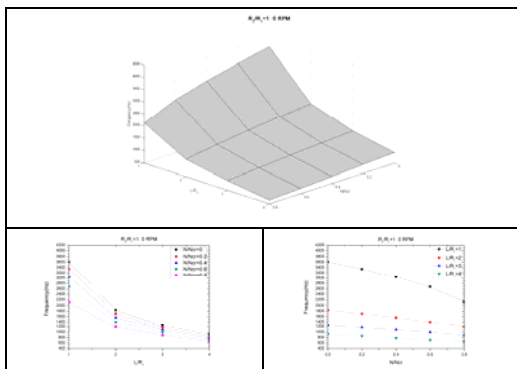


圖 5-5 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=1$ 、轉速 0 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最高基本振動頻率之關係圖。

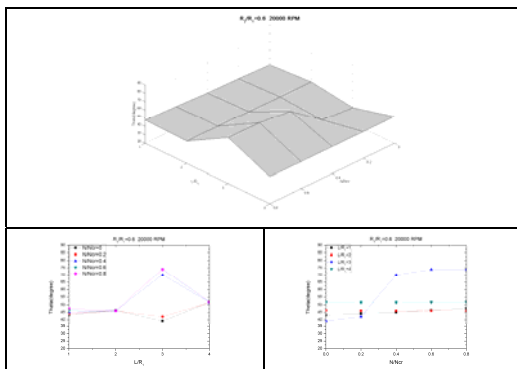


圖 5-8 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=0.6$ 、轉速 20000 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最佳纖維角度之關係圖。

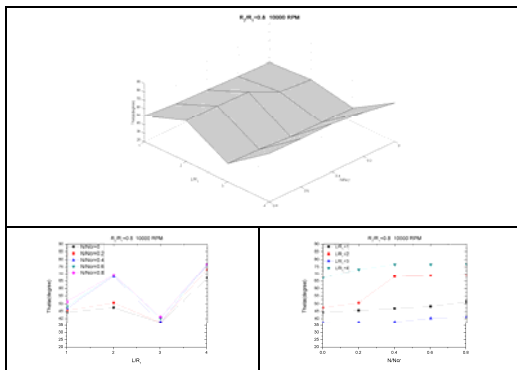


圖 5-6 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=0.8$ 、轉速 10000 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最佳纖維角度之關係圖。

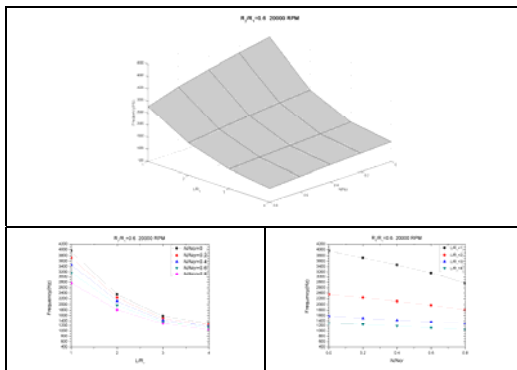


圖 5-9 複合疊層圓錐截柱殼，在 $R2/R1=0.6$ 、轉速 20000 RPM 下，隨幾何條件 $L/R1$ 、受軸壓力 N/Ncr 之變化與最高基本振動頻率之關係圖。

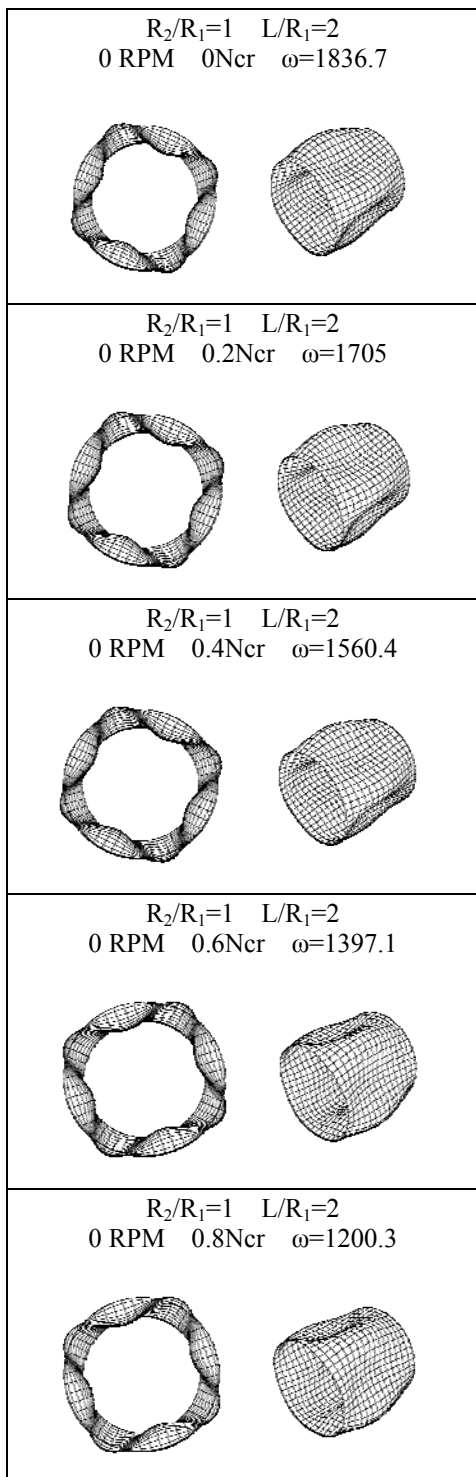


圖 5-10 $R_2/R_1=1$ 、 $L/R_1=2$ 、0 RPM 與各軸壓力下，複合疊層圓錐截柱殼的模態圖

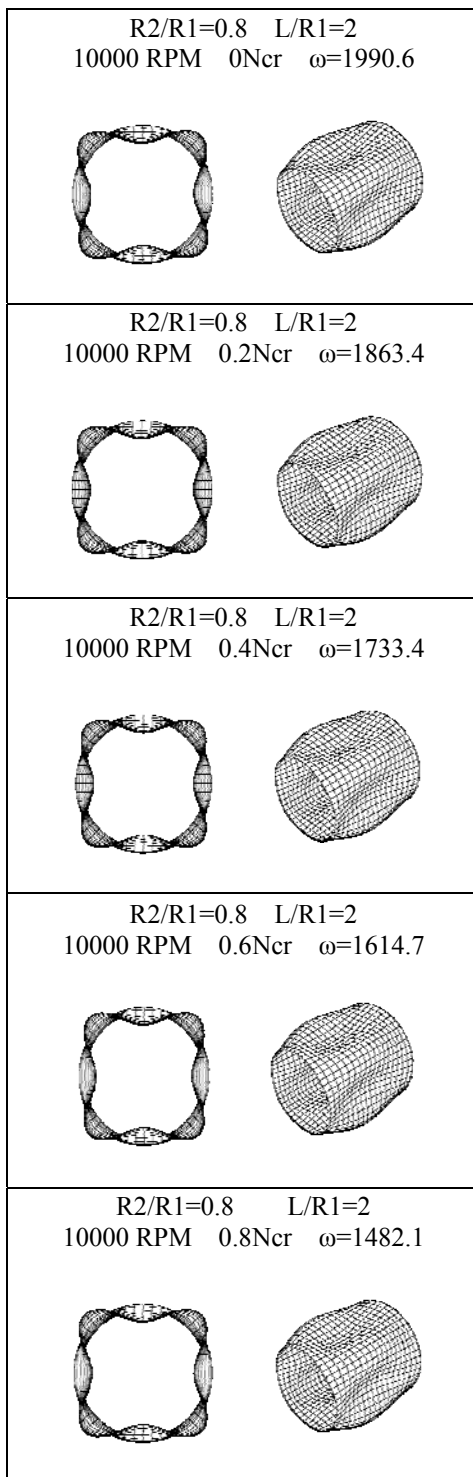


圖 5-11 $R_2/R_1=0.8$ 、 $L/R_1=2$ 、10000 RPM 與各軸壓力下，複合疊層圓錐截柱殼的模態圖

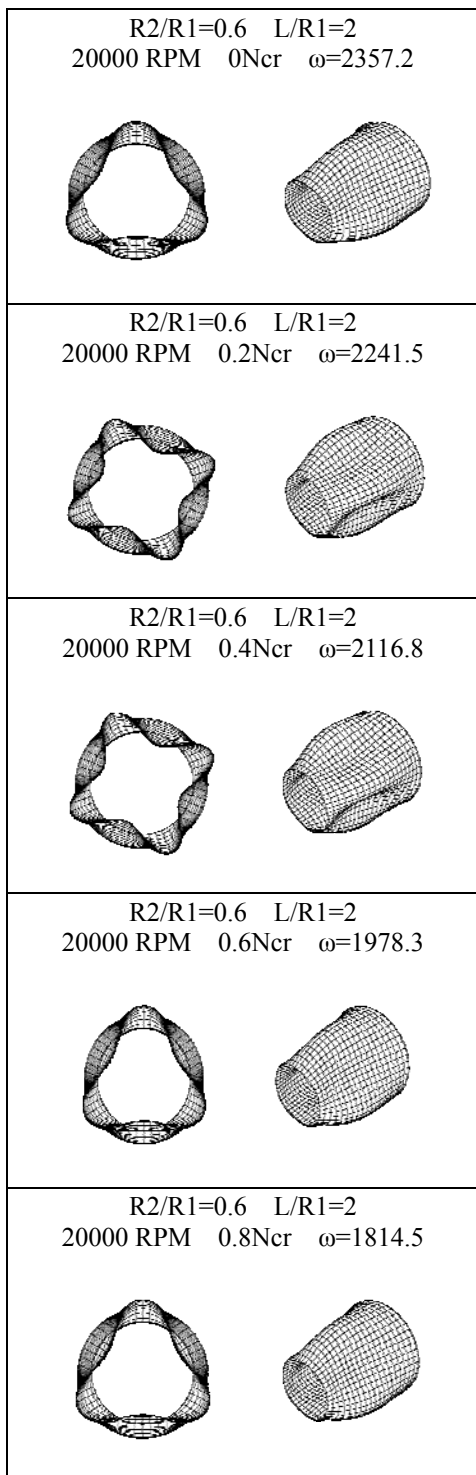


圖 5-12 $R2/R1=0.6$ 、 $L/R1=2$ 、20000 RPM
與各軸壓力下，複合疊層圓錐截柱殼的模
態圖