

顯式元素族(Explicit Element Type)於 Hopkinson Bar 之實驗驗證

丁羽辰¹，王義昕²，鄭泗滄³

鴻海精密股份有限公司¹，

財團法人船舶暨海洋產業研發中心²，國立成功大學航空太空工程研究所³

摘要

本文研究目的在於驗證 FEM(Finite Element Method)求解一維波傳(One-Dimension Wave)上的模擬結果與實驗比對。針對撞擊的瞬態問題，要如何正確使用模擬軟體設定如動態元素選用，可針對基礎實驗結果進行物理量驗證，但要建構瞬態實驗架構所花費的時間及成本都相當可觀，且需有合適的量測儀器如高速攝影機，加速規量測能力等其他考量。因此本文利用了 Hopkinson Bar 高速撞擊系統的一維波傳行為進行驗證，由於理論已有完整解析解外，同時也比較實驗和模擬結果，模擬使用 Abaqus 和 LS-DYNA 兩大泛用型 FEM 軟體，利用各自發展已久的瞬態求解器(Explicit Solver)，也比較兩軟體計算時間上的性能表現。其中應力波模擬與實驗結果，解析解皆相符。其中兩軟體針對元素類型規則的計算性能表現也呈現在文中。

關鍵字：一維波傳， Hopkinson Bar，實驗驗證，Explicit Solver，

ABSTRACT

The purpose of the study is to verify FEM (Finite Element Method) explicit element type performance with Hopkinson Bar (One-Dimension Wave) system. It is cost a lot about designing and building a basic experimental system to measure and get dynamic data especially transient behavior. Besides, we need to choose the suitable and right device, such as high G sensor, high camera, and strain gage at correct position. It's important to know the element type performance using FEM software. Therefore, we use the Hopkinson Bar system to verify differences among the simulation, experimental results and the analytical solution. The simulation performance was compared with LS-DYNA & ABAQUS. To sum up, the results were very close among these three different methods.

Keywords: Element Formulation， Explicit Element Type、Hopkinson Bar、analytical solution、MPP

一、緒論

目前 FEM 於產業上的應用已相當廣泛且具有許多成功案例，從協助解決問題，輔助設計到主導設計，甚至是當產品進入設計成熟化後，更可利用 FEM 來定義設計規範，並累積資料成為了知識中心；其他發展如研究學者從理論基礎上的更進一步開發屬於使用者本身的應用程式，不僅僅將本來模擬技術延伸，且推廣並結合業界，利用實

務經驗與學界理論基礎，嘗試商品化與客制化，漸漸成為了此領域的新發展之路。

目前 3C 產業有多種測試結構強度的分析項目，其中如跌落，衝擊都屬於瞬態行為，而 FEM 的 Explicit Solver 相當適合處理此種分析類型。瞬態力學的 FEM 也成為了此產業需要發展的技術能量之一。

就使用者方面而言，儘管軟體已有原廠的完整使用手冊指導和許多基礎範例來

佐證此軟體應用性與準確性，但 Abaqus & LS-DYNA 都屬於泛用型軟體，其軟體的許多預設設定在於解決大部分的工程問題外，若需針對更進一步的問題類型，就需進行設定調整與合理假設，當使用 FEM 求解產品瞬態分析時，除了軟體的預設設定外，不外乎為邊界(Boundary)，材料(Material)，幾何(Nodes & Elements)與元素類型(Type)等，我們針對顯式元素族類型，利用了 Hopkinson Bar 系統來驗證，並討論顯式元素族的剛性與計算性能 (Element Performance)。

二、文獻回顧與理論介紹

2.1 Hopkinson Bar 介紹

最早由 Bertram Hopkinson 在 1914 年發展，設計一套設備來討論高速衝擊子彈的壓縮行為，其目的為量測金屬桿的應力波傳，一開始先發展壓縮測試，而後更有學者發展拉伸，扭轉測試，大多應用此裝置討論金屬材料的高應變率與熱影響等，應用相當廣泛。如圖 1。

2.2 一維波傳理論 (One-Dimensional Wave Propagation Theory)

其假設為：

1. 材料均質且連續。
2. 為使應力波均勻傳遞，垂直桿件平面保持平面
3. 不考慮側向應變
4. 滿足牛頓第二定律
5. 材料滿足虎克定律

2.2.1 一維波動方程式

如圖 2，由牛頓第二運動定律

$$-\sigma A + (\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx)A + qAdx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

假設平面保持平面，截面積固定

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

滿足虎克定律 $\sigma = E\varepsilon$ 與軸向應變 $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} (E \frac{\partial u}{\partial x}) + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

不考慮體力情況下，

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{--(1)}$$

此為**一維波動方程式**。

dx : 微小軸向位移， $u(x, t)$: 軸向位移函數， $\sigma(x, t)$: 軸向應力， $q(x, t)$: 單位體力， ρ : 密度， A : 面積， E : 彈性模量

2.2.2 縱向應力波公式

考慮一長桿施加外力持續時間為 t ，再由牛頓第二運動定律

$$Fdt = mv, \sigma = \frac{F}{A}, m = \rho Adl, \text{ 可得}$$

$$\sigma Adt = \rho Adlv$$

則撞擊的應力波公式可整理如

$$\sigma = \rho \frac{dl}{dt} dv = \rho c (\Delta v) \quad \text{--(2)}$$

F : 外力, m : 質量, v : 速度, dl : 微小長度, c : 為應力波在桿件內的波速

2.2.3 材質密度相同桿件的軸向碰撞

採 D'Alembert solution **材質與相同截面軸向碰撞**，

$$u_1(x, t) = f_1(x - ct) + g_1(x + ct)$$

$$u_2(x, t) = f_2(x - ct) + g_2(x + ct)$$

$$\text{由 } v = \frac{\partial u}{\partial t}, \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \sigma = E\varepsilon$$

可整理為

$$\sigma(x, t) = E[f_1'(x - ct) + g_1'(x + ct)]$$

$$V(x, t) = -cf_1'(x - ct) + cg_1'(x + ct)$$

$$\begin{cases} V_1(x, 0) = V_1 \\ V_2(x, 0) = 0 \\ \sigma_1(x, 0) = 0 \\ \sigma_2(x, 0) = 0 \end{cases}$$

可聯立求解得 ($0 < X < L$)

$$\begin{cases} f_1'(x) = \frac{V_1}{2c} & \begin{cases} f_2'(x) = 0 \\ g_2'(x) = 0 \end{cases} \\ g_1'(x) = \frac{V_1}{2c} \end{cases}$$

如圖 3 為衝擊波傳遞的行為模式，

2.2.4 材質與截面積不同桿件軸向碰撞

圖 4 表材質相同但截面積不同的軸向碰撞，可由力平衡為

$$A_1\sigma_1 = A_2\sigma_2$$

假設速度為 u_0 ，由(2)式

$$\begin{cases} \sigma_1 = \rho_1 c_1 (v_1 - u_0) \\ \sigma_2 = \rho_2 c_2 (u_0 - v_2) \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{\frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2} v_1 + v_2}{\frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2} + 1}$$

$$\sigma_1 = \rho_1 c_1 \frac{A_2 \rho_2 c_2 (v_1 - v_2)}{A_1 \rho_1 c_1 + A_2 \rho_2 c_2} \quad \text{---(3)}$$

$$\sigma_2 = \rho_2 c_2 \frac{A_1 \rho_1 c_1 (v_1 - v_2)}{A_1 \rho_1 c_1 + A_2 \rho_2 c_2}$$

此為材質相同，不同速度，不同截面，應力波解析解。

應力波行為即為當物體在撞擊瞬間，瞬間外力會在固體材料內部，以波的形式進行，其利用內部粒子運動與位移進行傳遞。

2.3 實驗數據與解析解應用 (experimental data & analytical solution)

衝擊桿(SAE4130)以一速度 3570 mm/s 撞擊 Ti6Al4v 目標桿，如圖 5

$$v_1 = 3570(\text{mm/s})$$

$$v_2 = 0$$

$$A_1 = A_2$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{207000}{7.85e^{-9}}}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{114000}{4.43e^{-9}}}$$

$$\rho_1 = 7.85e^{-9}(\text{Ton/mm}^3)$$

$$\rho_2 = 4.43e^{-9}(\text{Ton/mm}^3)$$

帶入(3)式

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 51.51(\text{MPa})$$

三、實驗結果

量測架構與儀器位置如圖 6，利用儀器量出之應變值。實驗結果如圖 7。文獻[1]

四、有限元素模型設定說明

採用相同模型進行比較，其中 DYNA 的元素規則參考表 3,表 4,

(1)Hex (C3D8,C3D8R,C3D8I, Eq=1,2,3)

Element: 52155, Nodes: 60632,

(2)Tetra (C3D4, Eq=1,2,10,13):

Element: 54772, Nodes: 17642,

(3)Tetra Quadratic (C3D10M, Eq=16)

Element:54772, Nodes:104587。

材料設定:

Abaqus 使用 Elastic,

DYNA 採用 Mat001;

接觸設定:

Abaqus:

General Contact,

LS-DYNA:

*CONTACT_AUTOMATIC_SINGLE_SURFACE。

五、模擬結果討論

兩大泛用型的求解版本為 Abaqus 6.12-3 (單精)與 LS-DYNA mpps R7.0.0(單精)，Hex 比較結果如圖 8。

由結果可知 Abaqus 的實體元素族 (Hex, Tetra)之應力波模擬結果，其表現與解析解十分接近，同時應力波峰形狀與實驗相比近似。

而 LS-DYNA 提供了許多的 Element Formulation，其 Hex 系列的元素說明如表 3，當選擇 Eq=1,2,3 模擬結果如圖 9，其結果也與 Abaqus 任一實體結果接近。

我們知道一維波傳的作用力與變形方向皆為軸向，因此 Hex 兩個軟體的表現並不意外。但若選用 LS-DYNA 的 Tetra 系列需要注意的是 Eq=1,2(全積分)，Eq=1,2 發生最大應力的數值結果明顯與其他元素類型不同，其最大應力發生時間也不同，可得知其元素的軸向剛性表現相對其他元素類型較剛，而有其較大的應力結果。但其他 DYNA 的 eq=4,10,16 結果也與 Hex 比較是相當符合的。

六、計算測試性能

在同一台機器上進行 8Core, MPP 技術的平行計算性能比較如圖 8，計算結果比對如表 [1]。由結果可知，要得到一樣的一維

波傳分析結果，若採用 Hex 欲得最快分析結果可用 C3D8R(55 秒)，Eq=1(63 秒)，ABAQUS 比起 DYNA 快了 12.6%，若採用 Tetra 欲得最快的分析結果可用 C3D4(94 秒)與 Eq=10，(59 秒)，DYNA 快了 37.2%。至於 Tetra 的 eq=1,2 因結果不相同則不進行比較討論。

七、結論與未來展望

由本文可知，Abaqus 的顯式元素族在軸向剛性表現，只需採用預設，就有良好的應力波數值與行為，但再 DYNA 的計算結果可發現，若 Tetra 採用預設的 eq=1，或選擇了 eq=2 都會有過於剛的表現，且在提交問題進行計算時，並未有警告訊息。因此 DYNA 的使用者需注意元素選用的差異性，

除此之外，Abaqus 的 Standard 元素如 C3D4 其剛性遠大於 C3D10M 和其他的 Hex 元素，因此未來研究方向可討論顯式元素族性能與計算成本，並比較其他作用力行為如純彎，扭轉等。

八、參考文獻

- [1]王義昕，，設計與應用微型感測器於動態狀態訊號量測，國立成功大學航空太空研究所碩士論文，94，7 月
- [2] LS-DYNA_971_manual_k_rev1
- [3]Abaqus HTML Documentation-6 • 12

九、表格

Solid:Hex			
ABAQUS 6.12-3 (8 Core)		LS-DYNA MPPs R7.0.0 (8 Core)	
Element Type	Cost Time(秒)	Element Formulation	Cost Time(秒)
C3D8R	55	Eq=1 (Default)	63
C3D8	188	Eq=2	139
		Eq=3	485
C3D8I	177	Eq= -1	147
		Eq= -2	486

表 1 ABAQUS & DYNA Hex 計算效能比較

Solid:Tetra			
ABAQUS 6.12-3 (8 Core)		LS-DYNA MPPs R7.0.0 (8 Core)	
Element Type	Cost Time(秒)	Element Formulation	Cost Time(秒)
C3D4	94	Eq=1 (Default)	151
		Eq=2	397
		Eq=4	301
		Eq=10	59
		Eq=13	167
		Eq=16	631
C3D10M	505	Eq=17	876

表 2 ABAQUS & DYNA Tetra 計算效能比較

LS-DYNA	Hex Element Formulation
Eq=1	Constant Stress Solid
Eq=2	全積分 Fully Integrated S/R Solid
Eq=3	全積分, 8 node 帶旋轉自由度
Eq= -1	以Eq=2為基礎,針對細長比不能減少剪力自鎖
Eq= -2	以Eq=2為基礎,針對細長比不能減少剪力自鎖,比Eq=-1更準確

表 3 DYNA Hex

Element Formulation 說明

LS-DYNA	Tetra Element Formulation
Eq=1	(Constant Stress Solid)
Eq=2	(全積分 Fully Integrated S/R Solid)
Eq=4	(S/R quadratic tetrahedron 帶旋轉自由度)
Eq=10	1 point pressure tetrahedron
Eq=13	1 point nodal pressure tetrahedron
Eq=16	4 or 5 point 10-noded tetrahedron
Eq=17	10-noded composite tetrahedron

表 4 DYNA Tetra Element Formulation 說明

十、圖片

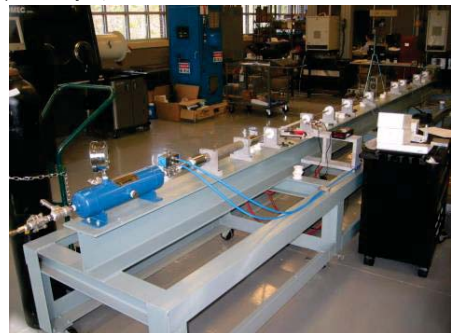


圖 1-1 Hopkinson Bar

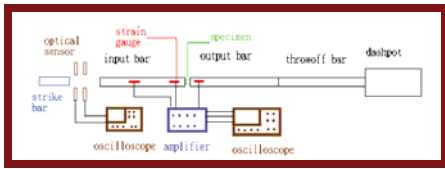


圖 1-2 Hopkinson Bar 實驗配置圖

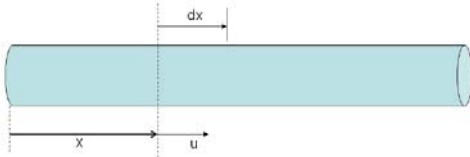
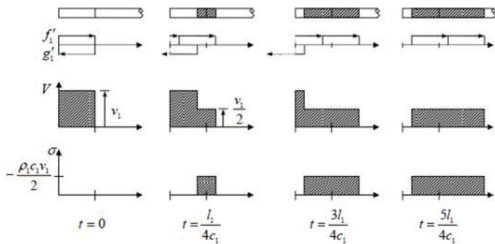


圖 2 一維波傳理論示意圖



- (A) $t=0$: 衝擊桿初速為 V ，目標桿無初速。
- (B) $t=l/4c_1$: f' 為向右前進波， g' 為向左反射波，截面相等，質量相同，速度減半，此時應力波值產生。
- (C) $t=3l/4c_1$: f' ， g' 繼續行走半個桿長，應力波向左向右持續傳遞。
- (D) $t=5l/4c_1$: f' ， g' 繼續再行走半個桿長，應力波向也持續傳遞。

圖 3 一維應力波傳遞模式

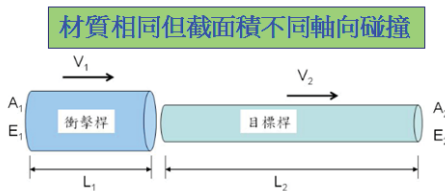


圖 4 材質相同但截面積不同

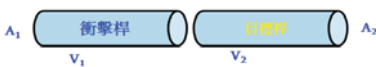


圖 5 一維波傳衝擊桿與目標桿實驗示意圖

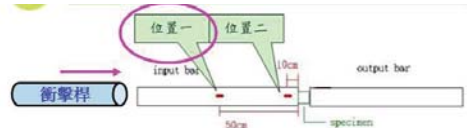


圖 6 應變計黏貼位置圖

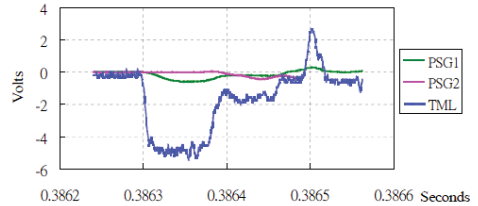
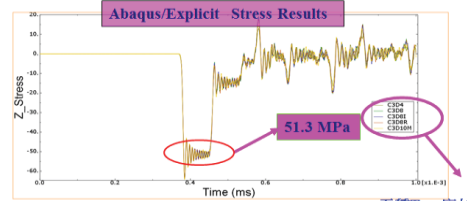


圖 7 應變實驗結果(0.4ms)
(Experimental Data)



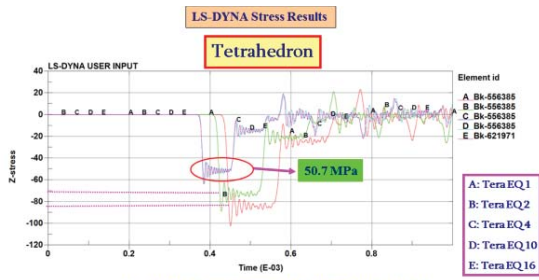
五種Type應力結果極為相似

圖 8 ABAQUS (Hex+Tetra) 實體元素的應力波結果(未濾波)



三種Formulation應力結果極為相似

圖 9 DYNA Hex 實體元素的應力波結果
(未濾波)



Eq-4,10,16 Formulation 應力結果極為相似,Eq-1,2
結果差異大且發生應力時間接無一致行為

圖 10 DYNA Tetra 實體元素的應力波結果
(未濾波)

十一、聯絡方式

丁羽辰(Steven Ting):

Steven.yc,ting@foxconn.com

Yahoo mail: yuchenting@yahoo.com.tw