嵌入式簡易可靠度分析與最佳化設計程式開發

周光武[1],黃仲偉[2],劉季宇[1],葉錦勳[1]
[1]國家地震工程研究中心；[2]中原大學土木工程學系

摘要

近年來由於電腦軟、硬體的快速發展，多尺度或耦合物理等複雜系統的分析已逐漸可行。然而面對產業升級的壓力，單純的定量分析已不滿足業界所需，進一步考慮變異性的可靠度分析以及成效改良的最佳化設計是不可避免的挑戰。目前業界的可靠度分析或最佳化設計軟體往往價格不斐，而若仰賴工程師自行開發相關程式則力有未逮。本文旨在利用Python建構嵌入式（plugin）程式主體，一方面ABAQUS為分析引擎，進行有限元素模擬；另一方面則以C++開發可靠度分析與最佳化設計程式。為簡化可靠度分析與最佳化設計龐大的計算量，本研究是採用中央複合設計的方式先建構出近似的反應面解析函數，可靠度分析採用蒙地卡羅法搭配反應面函數模擬；最佳化設計則採用循序二次規劃搭配反應面函數求解。數值實例顯示此嵌入式程式可迅速有效地得系統破壞機率或最佳解。

關鍵字：嵌入式程式、可靠度分析、最佳化設計、反應面法

ABSTRACT

Rapid developments of the computer software and hardware make it possible to perform multi-scale or multi-physics simulations. Even so, carrying out only deterministic simulation is insufficient to upgrade the industry. The reliability analysis to consider variability and the optimal design to improve product seem required and challenging. The commercial packages available for the optimal design and reliability analysis, however, are often expensive. And for engineers, developing programs to finish such analyses or designs could be difficult and consume much time. As a result, a Python plugin program that helps ABAQUS to perform the optimal design and reliability analysis is developed in this paper. To make the two procedures run efficiently, the C++ programming language is used to implement them, and the response surface method is exploited to generate analytical functions that approximate the responses obtained by ABAQUS. According to the approximated analytical response functions, the reliability analysis is executed with a Monte-Carlo simulation and the optimal design is solved by the sequential quadratic programming. Numerical results show that the plugin could help users effectively obtain the failure probability and optimal design of a structure.

Keywords: plugin, reliability analysis, optimal design, response surface method

一、緒論

任何產品在設計、製造、營運與維護階段均存在不確定因素,其來源包含材料本身的變異性、製造上的公差、分析模式的簡化、監測數據的解析度、以及操作和決策等不確定性。然而過去多數產品在設計和分析方法都是使用確定性（deterministic）的方式進行，頂多以安全係數（safety factor）考量不確定性對產品之影響。然而此種方式主要是基於過去工程師經驗累積而來,缺乏適當驗證以及未必適用於開發新產品,因此無法絕對保證產品安全無虞或者達到某個性能等級。此外,傳統方法亦無法了解不同參數對產品性能之影響程度。

另一方面,基於資源有限的概念以及產品朝向短、小、輕、薄發展的趨勢，在考慮

不同的限制條件下，進行產品的優化設計已然不可或缺。近年來由於電腦軟、硬體的快速發展，多尺度或耦合物理等複雜系統的分析已逐漸可行。故進一步考慮變異性的可靠度分析以及成效改良的最佳化設計將可協助產業的升級，同時也是 CAE 工程師不可避免的挑戰。

目前業界既有的可靠度分析或最佳化設計軟體往往價格不斐，而若仰賴工程師自行開發相關程式則力有未逮或曠日廢時。本文旨在利用 Python 建構嵌入式（plugin）程式主體，作為開發使用者介面（GUI）以及溝通 ABAQUS 之用。ABAQUS 則做為分析引擎，透過有限元素模擬得到所需的產品反應；另一方面，本研究以 C++開發可靠度分析與最佳化設計相關程式，用以評估產品破壞機率以及提供優化設計。此法的優點在於直接與 ABAQUS 相容，工程師可在熟悉的工作環境下操作，無需額外添購其他相關軟體。

此外，由於複雜系統的分析可能需要耗時數個小時以上，為簡化可靠度分析與最佳化設計龐大的迭代分析計算量，本研究採用中央複合設計（central composite design）的方式先建構出近似的反應面解析函數（response surface function），可靠度分析採用蒙地卡羅法搭配反應面函數模擬；最佳化設計則採用循序二次規劃搭配反應面函數求解。後續為方便起見，本文將基於前述方法所開發的嵌入式簡易可靠度分析與最佳化設計程式稱為 EZOpt，程式整體的架構圖如圖 1 所示。

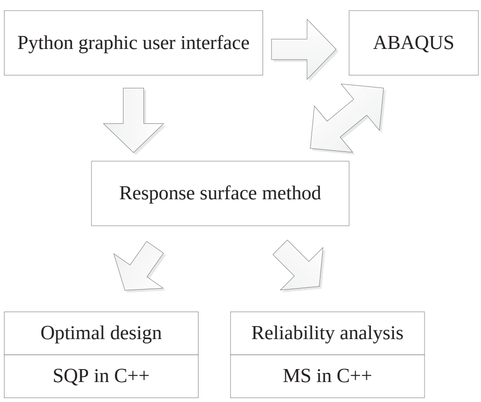


圖 1 程式架構圖

二、相關理論

本研究首先利用反應面法建構出產生系統反應（所關注的物理量，可以是位移、應力、能量或其他性質）與設計變數（所欲調整的參數）的近似解析函數（Montgomery 2009），再分別利用蒙地卡羅法（Melchers 1999）與循序二次規劃法（Schittowski 1985）進行可靠度分析與最佳化設計。底下就反應面法、可靠度分析與最佳化設計等相關理論敘述如後。

2.1 反應面法

對於一個複雜的系統，往往需要耗時甚久才能完整分析得到其反應。因此若愈進一步探討 N 個設計變數與系統反應之關係，即便採用單因子設計的方式也需要進行 N+1 次的分析。故本研究採用反應面法建構近似的顯性函數（explicit function）來取代系統與設計變數之間的隱函數（implicit function）關係，也就是將可靠度分析中的極限狀態函數或最佳化設計中的目標函數與限制式改以適當的多項式函數來近似。

常見的近似函數多取設計變數的低階多項式，其中最為簡潔的就是一階模型：

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i + \varepsilon \tag{1}$$

其中 y_j 為所欲近似的反應函數， $j = 1, 2,\ldots, M$，對應最佳化設計中的目標函數與限制式或是可靠度分析中的極限狀態函數。而 x_i 代表不同的設計變數，$i = 1, 2,\ldots, N$，ε為誤差項，a_0 與 a_i 為未定係數，$k = 1, 2,\ldots, N$。在線性系統中也意謂著各設計變數參與反應的程度，其值越大代表該設計變數為主要的因子。若反應函數與設計變數之間呈現非線性的狀況，則可採用納入曲率的數學模型來近似反應。在大多數情況下如下的二階模型是適用的。

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i + \sum_{i=1}^{N} a_{ii} x_i^2 \tag{2a}$$

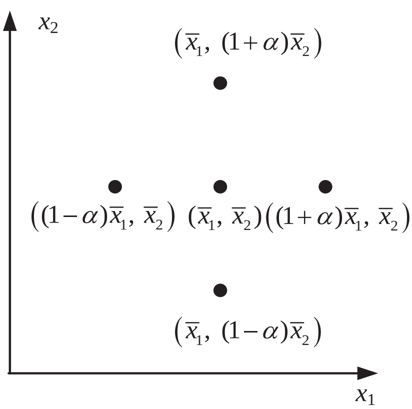
$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i + \sum_{i=1}^{N} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i<k}^{N} a_{ik} x_i x_k + \varepsilon \tag{2b}$$

方程式(2a)所示的近似函數只考慮設計變數的一次式與各自的二次式，一般以簡易二階模型稱之；而(2b)所示的近似函數則多考慮了設計變數之間的交叉項，一般以完

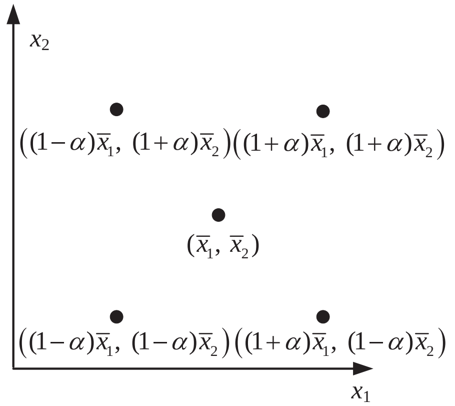
整二階模型稱之。從上述之近似方程式中可發現：若含有 N 個設計變數，則一階模型含有 N+1 個未定係數；簡易二階模型含有 2N+1 個未定係數；而完整二階模型則含有 N (N+3)/2+1 個未定係數。理論上近似的反應函數項數越多，越能充分考慮設計變數與系統反應之間的關係，然而當設計變數增多時，由於完整二階模型的未定係數個數係以 N^2 的方式增長，故實務上多以一階模型或簡易二階模型為主。

欲求得系統近似反應函數中未定係數，必須先利用 ABAQUS 模擬得到各種不同設計變數組合下的系統反應，再搭配最小二乘法（least square method）擬合求出近似方程式中各項的未定係數。對於不同設計變數組合的產生方式，文獻上常見的諸如：軸向點（axial points）、2^N 因子組合、中央複合設計法（central composite design）等方法。在此以兩個設計變數 x_1 與 x_2 為例，2N 軸向點與中心點組合的示意圖可參見圖 2(a)；而 2^N 因子與中心點組合的示意圖可參見圖 2(b)。此外，圖中的α為選定的常數，用以控制展開點的範圍。

綜合而言，反應面法就是多變數（multiple variables）的曲面擬合（surface fitting）或解釋成中心點附近的展開式函數，擬合的曲面函數可由使用者自行決定。反應面函數的正確性取決於設計點的組合。若設計點所包含的範圍較小，則所得的顯式函數基本上較精確，但適用範圍也相對較小；若設計點所包含的範圍較大，則所得的顯式函數可能無法反映出真實反應函數的細緻變化，但適用範圍相對較廣。



(a) 2N 軸點組合



(b) 2^N 因子組合

圖 2 設計變數組合示意圖

為避免設計變數因數量層級之間的不同，導致求解反應面時的數值不穩定。故進行反應面法近似函數擬合前，建議將設計變數予以正規化。對於可靠度分析的問題，對於第 i 個設計變數的正規化可利用下式：

$$x_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{3}$$

上式中 X_i與 x_i 分別為第 i 個設計變數正規化前、後的值，而μ_i 與σ_i 分別為第 i 個設計變數的平均值與標準差。而對於最佳化設計的問題，對於第 i 個設計變數的正規化可利用下式：

$$x_i = \frac{X_i - (X_{lower})_i}{(X_{upper})_i - (X_{lower})_i} \tag{4}$$

上式中$(X_{upper})_i$ 與$(X_{lower})_i$ 分別為第 i 個設計變數的上限與下限值。

2.2 可靠度分析

可靠度分析是以隨機變數模擬不確定參數，並利用機率密度函數（probability density function）表示系統需求與容量的機率分佈，進而預測破壞機率，而不發生破壞之機率定義為可靠度。故欲進行可靠度分析必須先調查各個不確定參數的分佈形式，決定利用何種機率分佈形式來進行後續分析。常見的連續型隨機變數分佈形式包括：常態分佈、對數常態分佈、β分佈、雷利分佈、指數分佈等；而離散型隨機分佈形式包括：二項分佈、幾何分佈與 Poisson 分佈（張瑜晏等 2010）。

其次，若將系統（結構或元件）的破壞與否以數學函數表示，一般稱此種函數為系統之極限狀態函式（limit state function）或是表現函式（performance function）。當隨機自變量（如結構載重、元桿尺寸、材料降伏強度等）使得極限函數小於零時就稱系統失效或不可靠。傳統上可將系統安全定義為系統容量（capacity）大於需求（demand），換句話說，系統極限函數可寫成下式：

$$G = R - Q \tag{5}$$

上式中 G 代表極限狀態函數，而 R 與 Q 分別代表系統容量與需求。當容量 R 小於需求 Q 時即代表系統失效；反之則代表系統安全無虞。

若進一步將需求 Q 與容量 R 定義為狀態變數（state variable），並將需求 Q 與容量 R 分別畫在 X 軸與 Y 軸（如圖 3 所示），則在狀態空間中可更清楚地表現出系統的極限狀態函數以及安全與破壞發生的區域。既然需求 Q 與容量 R 均為隨機變數，則可進一步定義聯合密度函數，如圖 4 所示（圖 3 中的同心圓即為聯合密度函數在 XY 平面上的投影）。由圖 4 可知，系統破壞機率即為聯合密度函數曲面下與 XY 平面上破壞區域所圍成之體積，或可利用下式表示：

$$P_f = \int\int_{G<0} f(X,Y)dXdY \tag{6}$$

上式中 $f(X, Y)$為 X 與 Y 兩個隨機變數的聯合機率密度函數（joint probability density function）。

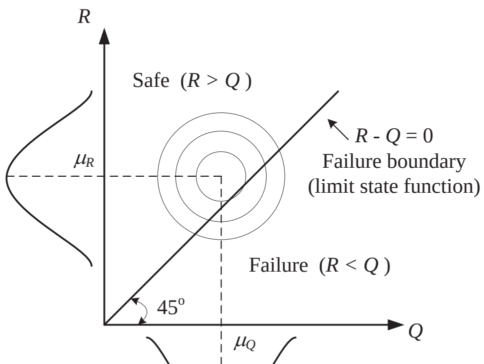


圖 3 二維狀態空間系統安全與破壞區域示意圖

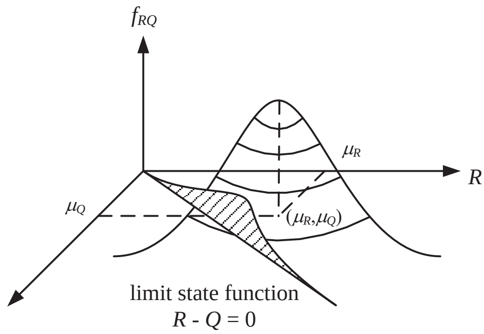


圖 4 聯合密度函數與極限狀態函數三維示意圖

然而就工程實際問題而言，由於極限狀態函數與隨機變數之間的關係通常極為複雜，且隨機變數彼此之間聯合密度函數往往並不可得，故無法直接計算圖4中的聯合密度函數曲面與XY平面之間所圍成的面積。故文獻上有不少方法來近似計算結構破壞機率，本研究選擇利用蒙地卡羅法（Monte Carlo method）求得系統可靠度。蒙地卡羅法是一種隨機模擬的方法，近年來隨著計算機的發展而逐漸被廣泛地運用再各領域。此法的優點乃是避開了繁雜的數學理論，純粹是用基本的機率理論來決定結構的破壞機率，舉例而言，當擲一粒骰子的次數達到一定時，每一面出現的機率約略為六分之一，而蒙地卡羅法大致上也就是如此。和其他方法相比，這種方法常被視為可靠度分析的正解。

假設所要分析的結構中有 N 個隨機變數，首先利用電腦隨機產生 N 個亂數（通常介於 0 與 1 之間），將每一個亂數利用標準常態分佈累積密度函數的逆轉換得到對應的標準常態分佈變數值；再配合已知的隨機變數型式（如常態分佈、對數分佈或是其他型式）以及隨機變數的平均值與標準差，再轉換成特定分佈形式的隨機變數值。如此可產生 N 個隨機變數的值，此即為一個樣本點。將此樣本點代入極限方程式看其是否掉入破壞區域內。同樣的方法模擬 m 次，其破壞機率即可以用下式算出

$$I[G(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1, & \text{if } G(\mathbf{X}) < 0 \\ 0, & \text{if } G(\mathbf{X}) > 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$P_f = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I[(\mathbf{X})] = \frac{n_f}{m} \tag{8}$$

其中 $\mathbf{X}$ 為 N 維空間中之樣本點，G 為極限狀態函數，n_f是樣本點落入破壞區城內的次數。

然而當破壞機率很小時，蒙地卡羅法所需模擬的次數是非常龐大的。一般可利用下式推估所需的模擬次數（趙國藩 1996）：

$$m = \frac{1-P_f}{\delta_{P_f}^2 P_f} \approx \frac{100}{P_f} \tag{9}$$

其中δ_{Pf}是 P_f的變異係數。舉例而言，若 $P_f = 10^{-4}$，$\delta_{Pf} = 0.1$，則所需的模擬次數 m 為 10^6。亦即如果破壞機率是 10^{-4}，而此破壞機率的變異係數為 0.1，則必須模擬 10^6 次才能得到較準確的破壞機率。因此對於複雜的系統而言，或系統牽涉到非線性分析等耗時之計算，若想知道系統破壞機率，利用蒙地卡羅法模擬顯然不切實際。然而本研究已利用反應面法求出極限狀態函數與隨機變數之間的近似解析式，故進行蒙地卡羅模擬時只需將亂數產生之每一組隨機變數代入方程式(1)中，因此只是單純的代數運算而無需進行複雜的有限元素模擬。

2.3 最佳化設計

最佳化方法已被廣泛的應用於各種行業，如軍事、航空、土木、管理、經濟等問題，舉凡所有需要尋找最小值或最大值的問題都可以歸納為最佳化問題。儘管最佳化之研究極具效益，但對應的計算相當龐大。以結構設計問題為例，在得到結構之最佳化設計過程中，數十次或是數百次之結構分析次數並不足為奇。以往電腦之運算速度有限或計算軟體所需的費用過於昂貴，因而影響到最佳化方法在實務上之應用。如今電腦不論在容量及運算速度均有驚人的成長，加上軟、硬體的普遍化，分析次數或時間已不再構成分析上的負擔。換言之，相較於採用最佳化技術進行設計所省下來的工程費用，計算所需的費用變得微不足道，故最佳化技術在未來必然廣受重視與應用。

一般最佳化問題的數學模式可定義如下：尋找一組N維的設計變數 $\mathbf{X} = <X_1, X_2,..., X_N>^T$ 使之能將目標函數（objective function）最小化，同時滿足所給定的等式限制式和不等式限制式。此外，對於設計變數之值可能給定某一容許範圍，一般稱為邊界限制式。上述可用下列方程式表之：

$$\text{Min.} \quad f(\mathbf{X}) = f\left(X_1, X_2, \cdots, X_N\right) \tag{10}$$

$$\text{Sb.} \quad h_i(\mathbf{X}) = h_i\left(X_1, X_2, \cdots, X_N\right) = 0 \quad i = 1 \text{ to } p \tag{11a}$$

$$g_i(\mathbf{X}) = h_i\left(X_1, X_2, \cdots, X_N\right) \le 0 \quad i = 1 \text{ to } q \tag{11b}$$

$$X_{kl} \le X_k \le X_{ku} \quad k = 1 \text{ to } N \tag{11c}$$

上式中，$f(\mathbf{X})$為目標函數，$h_i(\mathbf{X})$為等式限制式，$g_j(\mathbf{X})$為不等式限制式。p 和 q 分別代表等式限制式和不等式限制式的數目。X_{kl} 和 X_{ku} 分別對應於第 k 個設計變數之下限和上限，N 為設計變數的數目。

若所有方程式均為設計變數 $\mathbf{X}$ 的線性方程式，則稱為線性規劃問題；而若其中任一方程式為非線性方程式，則稱為非線性規劃問題。一般結構最佳化設計的問題多為非線性規劃類型，且設計變數通常為目標函數與限制式的隱函數（implicit function），亦即無法以解析的形式寫出目標函數與限制式與設計變數之間的關係。

本研究是採用循序二次規劃法求解非線性最佳化問題，該法被認為是目前解決非線性最佳性化問題最好的方法之一。其重點主要是將拉格蘭治函數（Lagrange function）的二階微分矩陣（Hessian matrix）引進所近似的目標函數中，而拉格蘭治函數一階微分矩陣的計算是採用擬牛頓法來近似，以節省計算效率，至於約束條件仍採用線性化方程式來模擬。故方程式(5)與(6)可用下列形式表示：

$$\text{Min.} \quad f(\mathbf{d}^{(k)}) = \nabla \mathbf{f}^T(\mathbf{X}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} + 0.5\mathbf{d}^{(k)^T}\nabla^2 L(\mathbf{X}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} \tag{12}$$

$$\text{Sb.} \quad \nabla h_i(\mathbf{X}^{(k)})^T\mathbf{d}^{(k)} = -h_i(\mathbf{X}^{(k)}) \quad i = 1 \text{ to } p \tag{13a}$$

$$\nabla g_j(\mathbf{X}^{(k)})^T\mathbf{d}^{(k)} = -g_j(\mathbf{X}^{(k)}) \quad i = 1 \text{ to } q \tag{13b}$$

$$X_{kl} \le X_k^{(k)} \le X_{ku} \quad k = 1 \text{ to } N \tag{13c}$$

上式中，$\mathbf{d}^{(k)}$為設計變數調整的搜尋方向，上標(k)代表迭代次數，L 為拉格蘭治函數，其定義如下：

$$L(\mathbf{X}^{(k)}) = f(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum_{i=1}^{p}(\lambda_h)_i h_i(\mathbf{X}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{q}(\lambda_g)_j g_j(\mathbf{X}^{(k)}) \tag{14}$$

其中λ_h 和λ_g 分別表示對應等式和不等式約束修件之拉格蘭治乘子。方程式(12)至(14)所定義的數學模式一般稱之為二次規劃問題，其優點在於搜尋方向 $\mathbf{d}^{(k)}$一定可以解出，且當$\nabla^2 L$ 為正定矩陣時，可得到該問題的唯一解。

如同前節所述的可靠度分析，本研究是利用反應面法得到目標函數與限制式的解析近似函數，再利用循序二次規劃法求解近似的最佳化問題。此種方式的優點在於求解(7)至(8)時所需用到的一階微分梯度向量與二維微分矩陣皆可得到解析式，而無需使用差分的方式計算；同時避免將每組設計變數都利用有限元素分析得到對應的目標函數與限制式，可大幅降低求解最佳化問題所需的時間。

此外，值得注意的是求解最佳化問題中的循序二次規劃法本身是個迭代的過程，透過不斷修正設計變數來搜尋目標函數的最佳值。為確保反應面函數能充分近似系統的反應，再得到設計變數最佳解之後，EZOpt 程式會根據此組最佳解產生對應的有限元素模型，再利用 ABAQUS 分析得到系統『真實』的反應。EZOpt 程式會檢核利用反應面函數所得之目標函數最佳值與 ABAQUS 根據設計變數最佳解模擬所得的目標函數值相比對，若兩者之相對誤差大於 10%，代表最佳解與中央複合設計法的中心點可能相距過遠，故近似的反應面函數無法正確外推至最佳解附近的系統反應，此一最佳解仍非系統真正的最佳解。

為克服上述的問題，EZOpt 中在進行最佳化時將反應面法同樣視為一個逐次迭代修正的程序，亦即將第一次近似反應面函數所得之最佳解取為第二次利用中央複合設計求取反應面的中心點，重新展開計算對應的反應面函數再進行最佳化。此一迭代過程會重複直至滿足前述收斂條件（反應面函數的最佳值與 ABAQUS 模擬驗證的最佳值相對誤差小於 10 %）為止。

三、數值實例

為驗證 EZOpt 近似理論與開發程式的正確性，在此以文獻上的 10 根桿件桁架作為測試案例，分別進行可靠度分析與最佳化設計，分述如後。

3.1 可靠度分析測試

考慮如圖 5 所示的 10 根桿件桁架結構物（Rahman and Wei 2006），其對應的幾何形狀、節點編號、桿件編號和外力加載方式見圖 5，其中 L = 360 in.，$P = 10^5$ lb。桿件材料係數為彈性係數 $E = 10^4$ ksi，密度 ρ = 0.1 lbm/in^3。採用線彈性分析，假設桿件面積為常態分佈之隨機變數，其對應的平均值為 2.5 in^2，標準差為 0.5 in^2。極限狀態定義為節點 2 之垂直位移必須小於 18 in.。

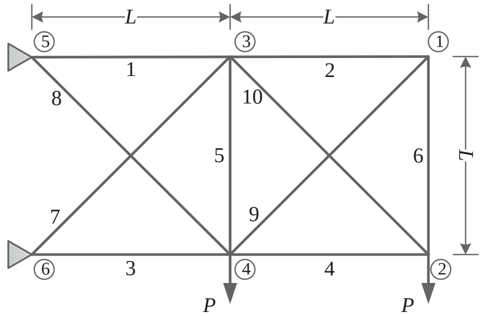
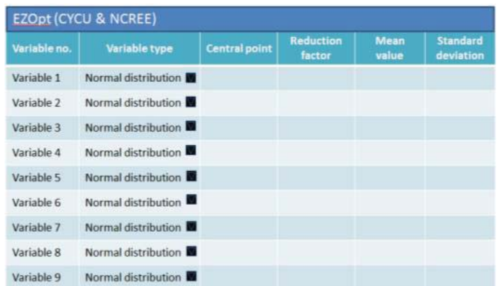


圖 5 10 根桿件桁架示意圖

首先利用 EZOpt 所提供的表單（參見圖 6）選擇反應面法近似函數型式（一階、簡易二階與完全二階），近似反應函數所需的中心點與折減係數α（參見圖 2），以及點位產生的方式（軸向點、2^N 因子點位與中央複合設計），其次輸入十個隨機變數的分佈型式（常態分佈、對數常態分佈或極值分佈），以及十個隨機變數的等效平均值和標準差。



EZOpt (CYCU & NCREE)

Variable no.	Variable type	Central point	Reduction factor	Mean value	Standard deviation
Variable 1	Normal distribution				
Variable 2	Normal distribution				
Variable 3	Normal distribution				
Variable 4	Normal distribution				
Variable 5	Normal distribution				
Variable 6	Normal distribution				
Variable 7	Normal distribution				
Variable 8	Normal distribution				
Variable 9	Normal distribution				

圖 6 EZOpt 可靠度分析中的操作介面

EZOpt 會自動產生該中心點展開所得之近似反應面，並且輸出擬合所得之反應面顯性函數方程式與對應的擬合係數 R^2（coefficient of determination）。由顯性函數方程式的係數可協助工程師明瞭各設計變數對系統反應的貢獻，可進一步進行敏感度相關分析而。擬合係數 R^2 可提供說明近似的反應函數是否充分擬合系統之反應，R^2 值越接近 1.0，代表近似函數擬合系統反應的效果越好。

EZOpt 預設之蒙地卡羅模擬次數為 1,000,000 次，本例中一階反應面函數所得之失敗機率為 0.0857，而簡易二階反應面函數所得之失敗機率為 0.1167，完整二階反應面函數所得之失敗機率為 0.1352。文獻上不同方法所得的失敗機率則介於 0.0862 與 0.1524 之間（Cai and Elishakoff 1994；Rahman and Wei 2006），顯示 EZOpt 所得之失敗機率與文獻上的結果相符合。

3.2 最佳化設計測試

同樣考慮10 根桿件桁架結構物 (Zhou 1992)，其幾何形狀、桿件編號和外力加載方式見圖 5。假設所有桿件材料性質同於前述，設計變數為 10 根桿件的斷面積，目標函數為結構物總質量，約束條件為桿件容許應力和結點容許位移，其上、下限值為：σ_u = 25 ksi，σ_l = 25 ksi，u_u = 2.0 in，u_l = -2.0 in。設計變數的邊界限制式為桿件斷面積最小值為 0.1 in^2。初始設計令 10 根桿件相同為 35 in^2。

使用者同樣先利用 EZOpt 所提供的表單（參見圖 6）選擇反應面法近似函數型式（一階、簡易二階與完全二階），近似反應函數所需的中心點與折減係數α以及點位產生的方式，針對目標函數（桁架總質量）以及位移與應力限制式分別產生對應的近似解析函數。其次輸入十個設計變數的初始值以及上、下限，EZOpt 會利用循序二次規劃法求解此一近似的二次最佳化問題。經過三次循環之後，EZOpt 所得之最佳化結果列於表 1 中。

表 1 10 根桿件桁架結構最佳化結果

變數	Rizzi (19)	Perez (2007)	EZOpt
A_1	30.73	33.50	30.25
A_2	0.10	0.10	0.10
A_3	23.93	22.77	23.02
A_4	14.73	14.42	15.35
A_5	0.10	0.10	0.10
A_6	0.10	0.10	0.51
A_7	8.54	7.53	7.49
A_8	20.95	20.47	22.15
A_9	21.84	20.39	25.52
A_{10}	0.10	0.10	0.10
總重量	5061.6	5024.2	5072.6

四、結論

本研究以支援物件導向之直譯式程式語言 Python 為中心，開發 ABAQUS 的嵌入式程式（plug-in）以進行結構可靠度分析與最佳化設計。Python 除了作為程式主體串連有限元素分析商業軟體 ABAQUS 之外，並用以開發相關的使用者介面，同時結合利用 C++所開發之結構可靠度分析與最佳化設計程式，利用 C++的快速運算能力來極高計算效率。

對於可靠度分析中所需的極限狀態函數，以及最佳化問題所需的目標函數與限制式，本研究利用中央複合設計法搭配反應面法建構這些函數的近似解析式。再利用蒙地卡羅法計算系統可靠度以及利用循序二次規劃法求解最佳化設計，可節省整個迭代過程所需的龐大計算量。

五、參考文獻

[1] Cai, G.Q. and Elishakoff, I., “Refined second-order reliability analysis,” *Structural Safety*, Vol. 14, pp. 267–276, 1994.

[2] Montgomery, D.C., *Design and analysis of experiments*, 7th edit., Hoboken, NJ: Wiley, 2009.

[3] Melchers, R. E., *Structural Reliability Analysis and Prediction*, 2nd edit., NJ: Wiley, 1999.

[4] Perez, R.E. and Behdinan, K., “Particle swarm approach for structural design optimization,” *Computers and Structures*, Vol. 85, pp. 1579-1588, 2007

[5] Rahman, S. and Wei, D., “A univariate approximation at most probable point for higher-order reliability analysis,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 2820-2839, 2006.

[6] Schittowski, K., "NLPQL: A Fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems," *Annals of Operations Research*, Vol. 5, pp. 485-500, 1985.

[7] 張瑜晏、吳嘉偉、劉明怡、薛強，結構可靠度分析方法之適用性研究，*中興工程季刊*，109 期，19-29 頁，2010.

[8] 趙國藩，工程結構可靠度理論與應用，大連理工大學出版社，1996。